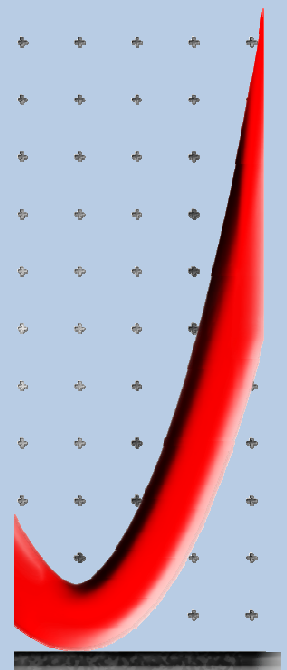
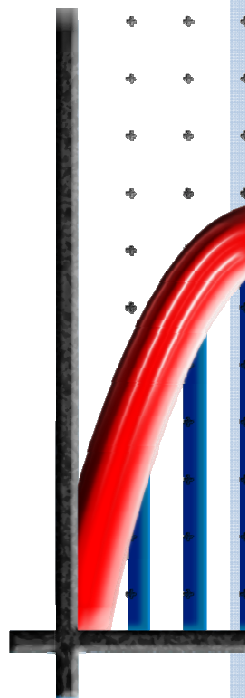


10

1

io



r Customer

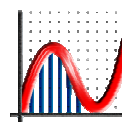
blishing Ltd

undle, PE8 4EJ, UK

332 273040

832 273529

graph-maths.com



Índice

Para Começar

A Circunferência de Nove Pontos de Euler	4
Boas Práticas.....	6
Modo de Quadro Branco e Teclado no Ecrã	8
Tecnologia para o Ensino da Matemática	10

Gráficos

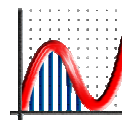
Funções Quadráticas	11
Programação Linear.....	13
Pesquisa ao Cubo.....	14
Iteração.....	15
Equações Paramétricas	16
Teorema Binomial	17
Trigonometria.....	18
Secções Cónicas.....	20

Geometria

Espelhos Sonoros.....	21
Geometria das Transformações	23
Transformações no Espaço.....	26
Teorema do Ângulo ao Centro	27
Vectores no Plano.....	28
Vectores no Espaço	29
Folhas de Pontos	31

Estatística

Os Pesos dos Bebés	32
Diagramas de Dispersão.....	33
Aproximações Normal e de Poisson à Distribuição Binomial.....	34
O Teorema do Limite Central	35

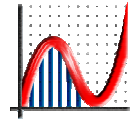


Cálculo

Introdução à Derivação	36
Derivação de Funções Trigonómicas	38
Calcular a Área sob a Curva	39
Uma Cabra a Pastar Metade de um Campo Quadrado.....	40
Volumes de Revolução	41
A Função Exponencial.....	42

Mecânica

A Bala Humana	43
Velocidade Terminal.....	44



A Circunferência de Nove Pontos de Euler

Nesta primeira tarefa irá familiarizar-se com a selecção de objectos e com os menus obtidos com o botão direito do rato, usados na maioria dos ficheiros Autograph.



Abra uma nova página 2D.

No menu *Eixos*, anule *Mostrar Tecla*.



Selecione o *Modo de Aspecto Igual*.



Apague os eixos.




Marque três pontos à sua escolha.



Selecione dois quaisquer pontos, clique no botão direito e escolha *Segmento de Recta*.

Há três formas de seleccionar mais do que um objecto:

1. Manter pressionada a tecla Shift enquanto clica sobre cada objecto.
2. Se os objectos são pontos, clicar e arrastar um rectângulo à sua volta.
3. Activar o modo de Quadro Branco  que permite seleccionar mais do que um objecto sem ter de pressionar a tecla Shift.

Repita o processo anterior com os outros dois pares de pontos até obter um triângulo.



Selecione os três segmentos de recta e atribua-lhes uma só cor.



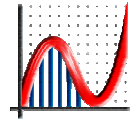
Selecione dois quaisquer pontos, clique no botão direito e escolha *Ponto Médio*. Repita para os outros dois pares.



Selecione um vértice e o lado oposto, clique no botão direito e escolha *Linha Perpendicular* para traçar uma altura. Repita para os outros dois vértices.



Selecione as três alturas e atribua-lhes uma só cor.



No modo de Ponto, pressione a tecla Ctrl enquanto desloca o cursor para o ponto de intersecção de uma altura com o lado correspondente do triângulo. Quando o cursor assumir a forma de um círculo, clique no botão esquerdo do rato para definir um ponto n essa intersecção. Repita para as outras duas alturas.



Utilize o processo anterior para definir um ponto na intersecção das três alturas.



Selecione o ponto de intersecção das três alturas e um vértice, clique no botão direito e escolha *Ponto Médio*. Repita com os outros dois vértices.

Os nove pontos do Círculo de Euler:

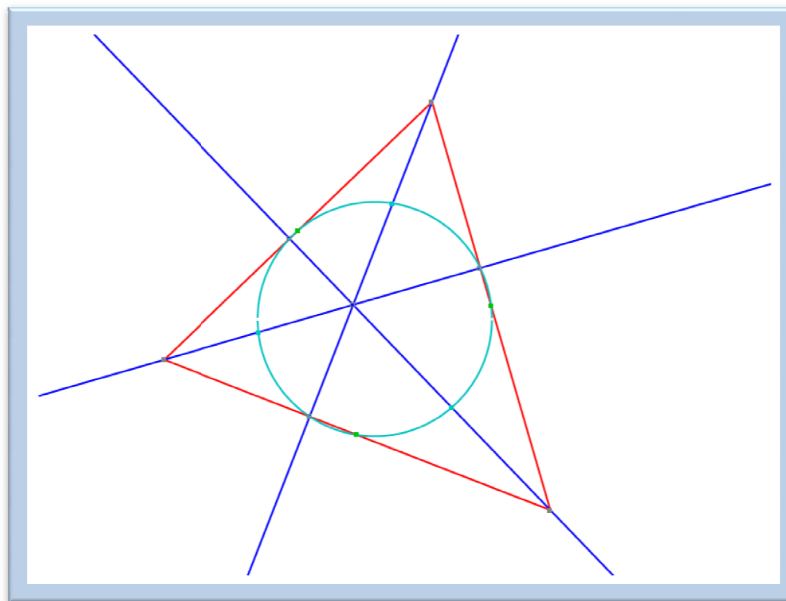
1. Os três pontos médios dos lados do triângulo.
2. Os três pontos de intersecção dos lados com as alturas.
3. Os três pontos médios entre os vértices e o ponto de intersecção das alturas.

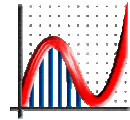


Selecione quaisquer três destes pontos, clique no botão direito e escolha *Círculo (3 pts)*.



Selecione um dos vértices do triângulo e desloque-o.





Boas Práticas

Um Exemplo de Má Prática



Abra uma nova página 2D.



Insira a equação: $y = x(x - 1)$

Seguindo estas instruções, o Autograph irá traçar uma parábola perfeita. No entanto, os alunos não terão tido oportunidade de *prever* os pontos de intersecção da curva com os eixos, o que acontece à curva quando x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$, onde se encontram máximos e mínimos, a forma da curva, etc. Quando mais tarde alguém lhes perguntar a forma da curva $y = x(x - 1)$, os alunos talvez se recordem dela ou da forma de introduzir a equação correspondente no Autograph, mas não é provável que tenham percebido por que razão a curva é como é. Que irão responder se lhes perguntarem sobre a curva $y = x(x - 1)(x - 2)$?

A Regra das Três Etapas

A boa prática de exploração de uma tarefa no Autograph pressupõe o respeito pelas três etapas seguintes:

1. **Apresentar** o problema
2. **Prever** a resposta
3. **Mostrar** a resposta

O Autograph tem duas ferramentas simples mas ponderosas de apoio à segunda etapa:



Escrever (*Modo de Rabisco*) e



Modo de Traçado Lento.

Apresentar



Abra uma nova página 2D.

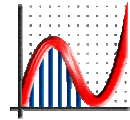


Active o *Modo de Traçado Lento*.

No *Modo de Traçado Lento*, os gráficos são traçados devagar da esquerda para a direita, e o traçado pode ser suspenso de modo a permitir aos alunos fazer previsões. O *Modo de Traçado Lento* fica activo até ser desligado. Não é necessário activá-lo a cada nova página.



Insira a equação: $y = x(x - 1)$



Clique imediatamente no botão de *Pausa no Traçado*.

Prever



Usando o lápis (*Modo de Rabisco*), os alunos podem assinalar as suas previsões.

Os alunos podem usar o lápis (*Escrever*) para assinalar os pontos de intersecção da curva com os eixos, o que acontece à curva para valores de x muito grandes ou muito pequenos, onde se situam os extremos da função ou a forma genérica da curva, por exemplo.

Mostrar



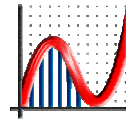
Torne a clicar no botão de *Pausa no Traçado*. O gráfico começará a ser traçado lentamente, da esquerda para a direita – e, espera-se, passando pelos pontos que os alunos tiverem assinalado com o lápis (*Rabisco*)!

Explorar tarefas com o Autograph



Quando vir este ícone deve dar aos seus alunos a oportunidade de prever o que irá acontecer a seguir, antes de continuar.

NOTA: Na medida em que os materiais aqui apresentados pretendem ser concisos, não se detalham instruções relativas à etapa das previsões dos alunos.




Modo de Quadro Branco e Teclado no Ecrã



Abra uma nova página 2D.



Introduza a equação: $y = x^2$ 

Suponhamos agora que pretende usar o Autograph com o quadro interactivo.

Selecione *Ver > Preferências > Quadro Branco* e selecione as quatro opções.



Active o *Modo de Quadro Branco*.

Nesta altura deverá observar, no ecrã, linhas mais espessas, o texto maior e o aparecimento do Teclado virtual.



No Teclado Virtual, clique em *Texto* para visualizar mais teclas.




Utilize o Teclado Virtual para inserir a equação: $y = (x - a)^2 + b$ 



Crie um ponto sobre a curva $y = x^2$, clique com o botão direito e escolha *Vector*. Insira



Clique em *Texto* no Teclado Virtual para o minimizar.

Utilize as setas (direita e esquerda) do Teclado Virtual para deslocar o ponto sobre a curva. 

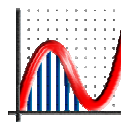
Em Modo de Quadro Branco, para seleccionar objectos apenas tem de clicar sobre eles, pela ordem desejada. Não se esqueça de anular todas as selecções anteriores antes de iniciar uma nova selecção. Para isso, clique numa qualquer zona vazia da página ou clique Esc no Teclado Virtual.

Clique Esc no Teclado Virtual para anular todas as selecções anteriores.



Crie um ponto sobre a curva $y = (x - a)^2 + b$ em (0, 2) e outro na curva $y = x^2$ em (0, 0).

Clique numa zona vazia da página para anular eventuais selecções anteriores.



Tarefas com o Autograph



Clique no ponto $(0, 0)$ e na curva $y = (x - a)^2 + b$, para seleccionar ambos. Clique no botão direito e escolha *Mover para a Próxima Intersecção*.

Anule todas as selecções.



Selecione o ponto $(0, 2)$ e o ponto de intersecção das duas curvas, clique no botão direito e selecione *Encontrar Área > Regra do Trapézio*.

Anule todas as selecções.



Selecione a área entre as duas curvas e clique em *Animar Objecto*. Altere o número de intervalos para 50. 🎓



Selecione a área entre as duas curvas e clique em *Caixa de Texto*. Use o Teclado virtual para alterar “Área” para “Área entre duas Quadráticas”.



Clique e arraste o ponto amarelo de modo a apontar para a área entre as curvas.



Use o *Controlador de Constantes* para alterar os valores de a e b . 🎓

O Teclado Virtual pode ser utilizado para teclar caracteres matemáticos noutras aplicações, como processadores de texto ou em mensagens de correio electrónico.



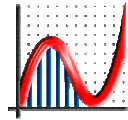
Abra o Bloco de Notas.



Use o Teclado Virtual para inserir: $\int 1/\sqrt{1+x^2} dx = \sin^{-1}x + C$

O carácter $^{-1}$ não vai aparecer correctamente porque não existe em muitos tipos de letra. Escolha Formatar > Tipo de Letra e selecione Arial for Autograph Uni.

O tipo Arial for Autograph Uni foi especialmente criado para o Autograph, de forma a suportar alguns símbolos matemáticos habitualmente não disponíveis noutros tipos de letra.



Tecnologia para o Ensino da Matemática

Mais recursos do Autograph

www.tsm-resources.com/autograph

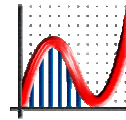
Visite a página Technology in Secondary Mathematics (TSM) para aceder a mais recursos do Autograph , entre os quais:

1. Imagens
2. Dados
3. Tutoriais *Autograph in Action*
4. Folhas de cálculo de Alan Catley, formador especializado em Autograph
5. Currículos

TSM Workshop 2010

www.tsm-resources.com/tsm-2010

Em 2011 celebrar-se-á a 10ª edição da oficina de formação TSM que, anualmente, proporciona a professores e matemáticos a oportunidade de descobrir como usar o Autograph e outras aplicações em contexto de sala de aula. Ao longo de três dias, cada participante tem tempo para aprender ao seu próprio ritmo e aqueles que pretendem ir mais além podem qualificar-se como Formadores Autograph Certificados.



Funções Quadráticas

Nesta tarefa explicamos como inserir equações e apresentamos o Traçado Lento, o lápis da ferramenta Escrever e o Controlador de Constantes.



Abra uma nova página 2D.



Edite os eixos e altere-os para $-12 \leq x \leq 12$ e $-6 \leq y \leq 6$.



Selecione o *Modo de Aspecto Igual*.



Active o *Modo de Traçado Lento*.



Insira a equação: $y = ax^2 + bx + c$

Clique em *Editar Constantes* e defina $a = 1$, $b = 1$ e $c = -2$; logo terá $y = x^2 + x - 2$.

Para inserir x^2 digite xx ou tecle Alt-2.



Clique imediatamente no botão de *Pausa no Traçado*.



Use o lápis (*Modo de Rabisco*) para assinalar alguns pontos notáveis: intersecção do gráfico de $y = x^2 + x - 2$ com os eixos, eventuais máximos, mínimos, etc.



Clique de novo no botão de *Pausa no Traçado*.



Selecione o gráfico, insira uma *Caixa de Texto* e assinale *Mostrar Texto Detalhado do Objecto*.



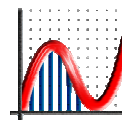
Insira a equação: $x = -b/(2a)$



Use o *Controlador de Constantes* para alterar os valores de a , b e c . Observe a relação entre a recta vertical e a curva.



Escolha um parâmetro no Controlador de Constantes usando o menu descendente. Altere o valor do parâmetro usando as setas para cima e para baixo e o valor do incremento com as setas para a direita e para a esquerda.



Tarefas com o Autograph

Conjecture sobre a posição da recta $x = -b/(2a)$ relativamente a $y = ax^2 + bx + c$. Pode provar?



Altere os valores de a , b e c para 1.



Selecione a recta vertical, clique no botão direito e escolha *Apagar Objecto*.



Insira o ponto de coordenadas $(b^2 - 4ac, 0)$. 



Selecione o ponto, clique no botão direito e escolha *Círculo (raio)*. Insira o valor 0,4 e clique OK.



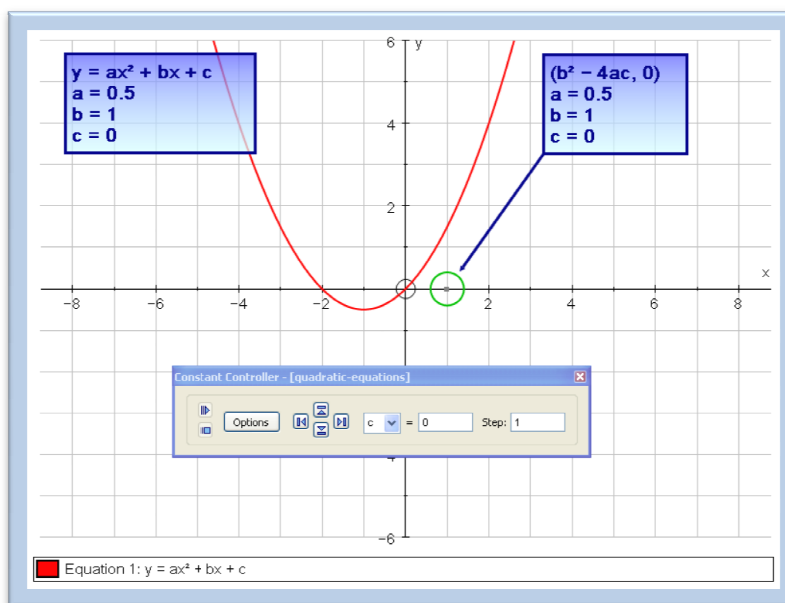
Selecione o ponto, insira uma *Caixa de Texto* e assinale *Mostrar Texto Detalhado do Objecto*.

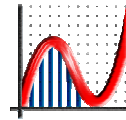


Use o *Controlador de Constantes* para alterar os valores de a , b e c . 

Para diferentes valores de a , b e c , tome nota dos valores de $b^2 - 4ac$ e da posição do gráfico correspondente $y = ax^2 + bx + c$. Sugestão: observe quantas vezes o gráfico intersecta o eixo dos xx e relacione com $b^2 - 4ac < 0$, $b^2 - 4ac = 0$ or $b^2 - 4ac > 0$.

Faça uma conjectura sobre como prever o número de raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ a partir do valor de $b^2 - 4ac$.





Programação Linear

Problema

Um grupo de alunos está a organizar uma excursão de um dia ao Porto a fim de angariar fundos para uma instituição de solidariedade social. Já decidiram que o preço dos bilhetes é de €10 por adultos e €5 por criança.

Restrição 1: A carrinha que foi alugada só pode transportar 14 pessoas.

Restrição 2: A excursão só se realiza se houver um mínimo de 10 participantes.

Restrição 3: Tem de haver pelo menos tantas crianças como adultos.

Resolução

Seja x o número de crianças e y o número de adultos. Então as três restrições traduzem-se por:

Restrição 1: $x + y \leq 14$

Restrição 2: $x + y \geq 10$

Restrição 3: $x \geq y$




Abra uma nova página 2D.



Edite os eixos e altere-os para $0 \leq x \leq 15$ e $0 \leq y \leq 15$.




Insira as equações: $x + y \leq 14$, $x + y \geq 10$ e $x \geq y$ 

Tecla \leq para obter \leq e \geq para obter \geq .

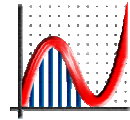
Os alunos pretendem angariar o máximo de dinheiro possível: em termos matemáticos, dizemos que pretendem maximizar a função $5x + 10y$, a que chamamos a Função Objectivo.



Insira a equação: $5x + 10y = k$ 
Clique *Editar Constantes* e defina $k = 10$



Use o *Controlador de Constantes* para encontrar o valor que maximiza $5x + 10y$ (bem como os valores correspondentes de x e de y) de modo a que a função objectivo se mantenha dentro da região de validade.



Pesquisa ao Cubo

Esta pesquisa é normalmente precedida da apresentação, aos alunos, de um caso particular – por exemplo, $y = (x - 2)(x + 3)(x + 4)$; só depois se deve passar para o caso geral.




Abra uma nova página 2D.




Edite os eixos e altere-os para $-6 \leq x \leq 6$ e $-30 \leq y \leq 30$.




Insira a equação: $y = (x - a)(x - b)(x - c)$ 

Clique em *Editar Constantes* e defina $a = -2$, $b = 1$ e $c = 5$.




Selecione a curva e introduza um ponto em $x = a$. 




Selecione o ponto e insira uma *Caixa de Texto*, clique *Remover Texto do Objecto* e altere-o para “A”. Repita para b e c . 



Selecione a curva e introduza um ponto em $x = (a + b)/2$, que é a abcissa do ponto médio das raízes $x = a$ e $x = b$. 



Selecione o ponto, clique com o botão direito e escolha *Tangente*. 

O que observa na intersecção da tangente com o eixo dos xx ?



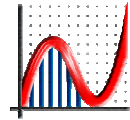
Selecione a tangente, clique com o botão direito e escolha *Editar Opções de Desenho*. Altere o *Estilo de Linha* para tracejado.

Repita para o ponto médio das raízes $x = b$ e $x = c$, e depois para o ponto médio das raízes $x = a$ e $x = c$.



Use o *Controlador de Constantes* para alterar os valores de a , b e c . Que acontece quando duas raízes coincidem? Em que condições é que duas das tangentes são paralelas?

Agora que observou este resultado... consegue demonstrá-lo matematicamente? Sugestão: comece por assumir que uma das raízes é 0.



Iteração

Muitas equações não podem ser resolvidas por meios convencionais, por exemplo, $2^x = x^3$. Nestes casos é necessário utilizar métodos numéricos para encontrar as soluções.




Abra uma nova página 2D.



Edite os eixos e altere-os para $-6 \leq x \leq 6$ e $-30 \leq y \leq 30$.



Insira as equações: $y = 2^x$ e $y = x^3$ 

O carácter * pode ser inserido usando o tipo de letra Arial for Autograph Uni.

A olho, onde estima que seja a intersecção destas curvas com o eixo dos xx?



Selecione ambas as curvas e tecle Delete.

Mostre que pode escrever $2^x = x^3$ como $x = (2^x)^{1/3}$. Assim sendo, a abcissa da intersecção de $y = x$ e $y = (2^x)^{1/3}$ é igual à abcissa da intersecção de $y = 2^x$ com $y = x^3$.

Vamos usar a fórmula da iteração $x_{n+1} = (2^{x_n})^{1/3}$ para resolver a equação dada.



Selecione o *Modo de Aspecto Igual*.



Insira as equações: $y = (2^x)^{1/3}$ and $y = x$



Insira um ponto sobre a recta $y = x$.



Selecione o ponto e a curva $y = (2^x)^{1/3}$, clique no botão direito e escolha *Iteração $x=g(x)$* .

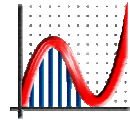
Clique na seta direita para efectuar a iteração. O que parece estar a acontecer na página do gráfico e na caixa de diálogo?



Amplie para observar mais de perto o que está a acontecer.



Selecione e arraste o ponto inicial da iteração.



Equações Paramétricas

O Autograph suporta a inserção de diferentes tipos de equações: cartesianas, trigonométricas, exponenciais, hiperbólicas, implícitas, cónicas, polares, paramétricas, por ramos e diferenciais. Nesta tarefa explora-se a forma paramétrica da equação de Lissajous.



Abra uma nova página 2D.



Selecione Radianos.



Selecione o *Modo de Aspecto Igual*.



Active o *Modo de Traçado Lento*.



Insira a equação: $x = \cos(bt)$; $y = \sin t$



Por defeito, o valor de b é 1, pelo que inicialmente esta equação é $x = \cos t$; $y = \sin t$.



No *Controlador de Constantes*, defina a iteração para 1; assim só irão ser considerados valores inteiros de b . Fazendo variar b , pesquise a família de curvas.

O que pode dizer acerca dos intervalos de variação de x e y nestas curvas? O que pode dizer acerca do valor de b quando a curva é fechada? Existe alguma relação entre o valor de b e o número de regiões definidas pela curva?



Defina $b = 2$.



Clique *Recomeçar o Traçado* e deixe $0 \leq t \leq 2\pi$.

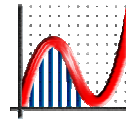
Observe o traçado e sobreposições que ocorrem no gráfico. Experimente para diferentes valores de b . Haverá sempre sobreposições? Estabeleça uma conjecture acerca da relação entre o valor de b e o número de sobreposições que observa no traçado do gráfico.



Altere o incremento para 0.1 e repita a pesquisa para obter dados que lhe permitam perceber melhor o papel da paridade de b .



Abra a Ajuda (F1), navegue para *Recursos > Exemplos de Equações: 2D > Equações Paramétricas* e explore alguns dos exemplos apresentados.




Teorema Binomial

A aproximação binomial é frequentemente utilizada para a aproximação de potências de números próximos de 1, mas qual deve ser essa proximidade para que a aproximação seja boa? A fórmula de referência para o Teorema Binomial de Newton é:



Abra uma nova página 2D.



Insira a equação: $y = (1 + x)^{5/8}$ 

Use a fórmula acima para determinar a expansão de $(1 + x)^{5/8}$ com dois termos.



Selecione a curva e introduza *Ponto na Curva* em $x = 0$.




Selecione o ponto, clique no botão direito e escolha *Tangente*. 



Accione o *Modo de Traçado Lento*.




Insira a sua aproximação (dois termos) de $y = (1 + x)^{5/8}$. 

Selecione a curva, clique no botão direito, escolha *Opções de Desenho*, altere o *Estilo* da linha para tracejado e a *Espessura* para 6pt.

O que pode dizer acerca desta aproximação e da tangente à curva em $x = 0$?



Determine os três primeiros termos da expansão e introduza-os. 



Aproxime para observar a qualidade da aproximação para valores de x vizinhos de 0.

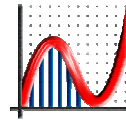


Determine os quatro primeiros termos da expansão e introduza-os. 

Qual é o intervalo de variação de x que lhe parece mais adequado a cada uma das aproximações?



Para aproximações a outras funções pesquise *Série Maclaurin* na Ajuda (F1).
O Autograph permite definir e animar o número de termos a apresentar (máximo de 10).



Trigonometria

Nesta tarefa iremos mostrar uma relação entre os gráficos de funções trigonométricas e o círculo trigonométrico.



Abra uma nova página 2D.

Abra o menu *Eixos* e anule *Mostrar Tecla*.



Defina os eixos para $-2 \leq x \leq 7$ e $-7 \leq y \leq 2$.



Selecione *Radianos*.



Selecione o *Modo de Aspecto Igual*.



Insira o ponto de coordenadas $(-1, 0)$.




Selecione-o, escolha *Caixa de Texto > Remover Texto do Objecto* e altere para "A".



Selecione o ponto, clique no botão direito, escolha *Círculo (Raio)* e mantenha o raio 1.



Selecione o círculo e insira um *Ponto na Curva* em $t = \theta$. Por defeito $\theta = 1$. 

Use Alt-t para inserir θ .



Selecione-o, escolha *Caixa de Texto > Remover Texto do Objecto* e altere para "B".



Selecione os dois pontos, clique no botão direito e escolha *Segmento de Recta*.



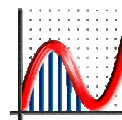
Insira o ponto de coordenadas $(0, 0)$.



Selecione-o, escolha *Caixa de Texto > Remover Texto do Objecto* e altere para "C".



Selecione os pontos C, A e B por esta ordem, clique no botão direito e escolha *Ângulo*. Assinale *Permitir Ângulo Reflexo*.



Tarefas com o Autograph



Selecione o ponto B, clique no botão direito e escolha *Linha Horizontal*.



Selecione a *Linha Horizontal* e introduza um *Ponto na Linha* em $x = \theta$. 




Selecione-o, escolha *Caixa de Texto > Remover Texto do Objecto* e altere para "D".



Selecione o ponto D, clique no botão direito e escolha *Traçar Ponto*.



Abra o *Controlador de Constantes*, altere o valor de θ para 0, o valor do incremento para 0,01 e use a seta para cima para aumentar o valor de θ até 2π . 

Que observa acerca do movimento do ponto D?



Defina $\theta = 1$.



Selecione o ponto B, clique no botão direito e escolha *Linha Vertical*.



Selecione a *Linha Vertical* e introduza um *Ponto na Linha* em $x = -\theta$.




Selecione-o, escolha *Caixa de Texto > Remover Texto do Objecto* e altere para "E".



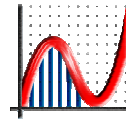
Selecione o ponto E, clique no botão direito e escolha *Traçar Ponto*.



Use o *Controlador de Constantes* para alterar o valor de θ para 0, o valor do incremento para 0,01; use a seta para cima para fazer variar o valor de θ até 2π . 

Que observa acerca do movimento do ponto E?

Há outras funções que se podem representar a partir do círculo trigonométrico. Será capaz de construir o gráfico da função tangente?




Secções Cónicas




Abra uma nova página 3D.



Insira a equação polar de um cone: $r = z$ 



Insira a equação de um plano: $z = ax + b$ 
Por defeito, o valor das constantes a e b é 1.



Use o *Modo Arrastar* para observar, sob diferentes ângulos, a intersecção do cone com o plano. Que forma tem essa intersecção?



Use o *Controlador de Constantes* para diminuir o valor de a para 0,5. Qual é agora a forma da intersecção?



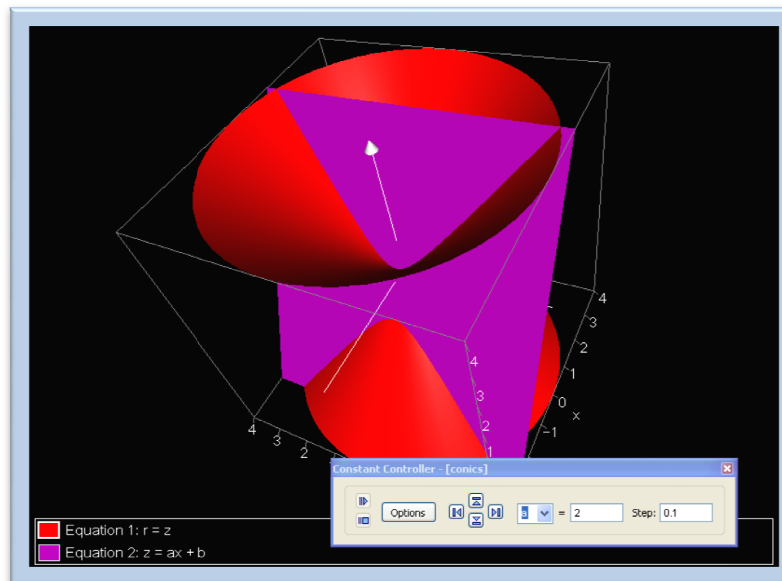
Use o *Controlador de Constantes* para diminuir o valor de a para 0. Qual é agora a forma da intersecção?

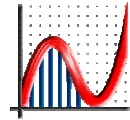


Use o *Controlador de Constantes* para aumentar o valor de a para 2.



Use o *Modo Arrastar* para observar, sob diferentes ângulos, a intersecção do cone com o plano. Que forma(s) assume essa intersecção?





Espelhos Sonoros

Entre 1920 e 1930, ao longo da costa sul de Inglaterra, foram construídas grandes estruturas para detecção e prevenção face à ameaça crescente de ataques aéreos.

Pesquise “Sound Mirrors” no Google para saber mais sobre essas estruturas. A que distância era possível detectar um avião que se aproximasse? Que dimensões tem o maior espelho sonoro existente?

Use o Flash Earth (www.flashearth.com) para localizar o espelho sonoro existente perto de Dungeness e do aeroporto de Lydd. Use Print Screen para obter uma imagem do espelho, abra-a no Paint, recorte conforme necessitar e guarde em formato jpg.



Abra uma nova página 2D.



Selecione *Modo de Aspecto Igual*.



Clique no botão direito, escolha *Introduzir Imagem*, procure e abra o ficheiro jpg com a imagem do espelho sonoro.



Clique duas vezes sobre a imagem, limpe a selecção em *Escalar Imagem com Eixos* e aumente a *Transparência* para 50%.




Desloque a imagem para que o ponto médio da curva coincida com a origem dos eixos.



Use o *Modo Arrastar* para deslocar os eixos para a esquerda do ecrã.

O espelho sonoro de Dungeness está virado quase exactamente para Este. Que curva modelará esta forma? Poderá ser uma parábola?



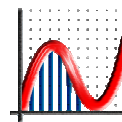
Insira a equação: $x = by^2$ 

Por defeito, o valor de b é 1, pelo que inicialmente a equação é $x = y^2$.



Que necessita fazer a b para que a curva se aproxime da forma do espelho? Tome nota do valor de b que melhor modela essa forma.

Parece bastante claro que o espelho tem a forma de uma parábola, mas por que motivo? Vamos então pesquisar o que acontece ao som (ou à luz) que atinge o espelho paralelamente ao eixo dos xx .



Tarefas com o Autograph



Selecione a imagem do espelho e apague-a.



Marque um ponto sobre a parábola.



Selecione-o, escolha *Caixa de Texto > Remove Texto do Objecto* e altere para "P".



Selecione o ponto P, clique no botão direito e escolha *Normal*. 🎓



Ainda com o botão seleccionado, clique no botão direito e escolha *Linha Horizontal*.



Marque um ponto na *Linha Horizontal* à direita do ponto P.



Selecione-o, escolha *Caixa de Texto > Remove Texto do Objecto* e altere para "R".



Selecione os pontos P e R, clique no botão direito e escolha *Agrupar na Forma*.



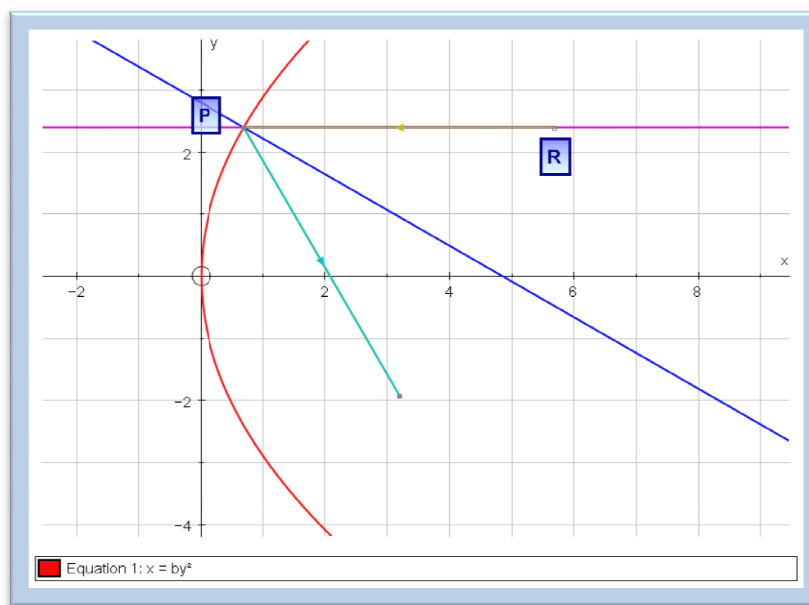
Selecione a Forma (pode ter de clicar duas vezes para anular a selecção da Linha Horizontal). Prima Shift e selecione a *Normal*. Clique no botão direito e escolha *Reflexão*.

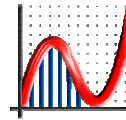


Selecione R e P, por esta ordem, clique no botão direito e escolha *Criar Vector*.



Desloque o ponto P sobre a parábola e descreva o que observa.





Geometria das Transformações



Abra o Autograph no Nível Padrão.

Se o Autograph já estiver aberto no Nível Avançado, vá ao menu *Ver > Preferências > Geral* e seleccione o *Nível Padrão*.

Abra o menu *Eixos* e anule *Mostrar Tecla*.

O Autograph pode ser usado nos níveis Padrão ou Avançado. Regra geral, deve usar-se o Nível Avançado quando se trabalha em Cálculo ou com Radianos.



Abra uma nova página 2D.



Defina $-10 \leq x \leq 10$ e $-10 \leq y \leq 10$; defina 1 para os intervalos entre marcas.



Seleccione o *Modo de Aspecto Igual*.



Seleccione *Grelha Ajustada às Unidades*.



Marque quatro pontos tais que $0 \leq x \leq 4$ e $0 \leq y \leq 4$.

Na sala de aula peça a quatro alunos para vir ao quadro marcar um ponto cada:

1. Se tiver um quadro interactivo, utilize o Modo de Ponto.
2. Se não tiver, dê a cada aluno uma marca circular com bostik para colar no quadro. Depois acrescente um ponto usando o Autograph.



Designe os pontos como A, B, C e D.



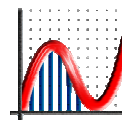
Seleccione os quatro pontos, clique no botão direito e escolha *Agrupar na Forma*.

Rotação

Vamos dar à figura uma rotação de 90° , com centro (0, 0) e em sentido directo (contrário aos ponteiros do relógio).



Marque um ponto em (0, 0).



Tarefas com o Autograph



Use o lápis (*Modo de Rabisco*) para prever a localização das imagens dos pontos A, B, C e D depois de uma rotação de 90° em sentido directo em torno de $(0, 0)$.



Selecione a forma e o ponto, clique no botão direito e escolha *Rotação*.



Use o lápis (*Modo de Rabisco*) para prever a localização das imagens dos pontos A, B, C e D depois de uma rotação de 180° em sentido directo em torno de $(0, 0)$.



Selecione a figura depois de rodada, clique no botão direito e escolha *Animar Forma*. Use a seta direita para aumentar o ângulo de rotação para 180° .



Clique duas vezes sobre a figura depois de rodada e anule *Mostrar Linhas de Construção*.

Abra o menu *Editar > Seleccionar Todos os Rabiscos* e faça Delete.

Ampliação

Vamos agora ampliar a figura rodada, a partir do ponto $(0, -5)$ e com razão de semelhança 2.



Marque um ponto em $(0, -5)$.



Use o lápis (*Modo de Rabisco*) para prever a localização das imagens dos vértices depois de uma ampliação com razão de semelhança 2 e centro no ponto $(0, -5)$.



Selecione a figura e o ponto, clique no botão direito e escolha *Ampliação*.



Use o lápis (*Modo de Rabisco*) para prever a localização das imagens dos vértices depois de uma ampliação em que a razão de semelhança fosse 3.



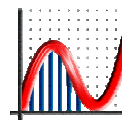
Selecione a figura ampliada, clique no botão direito e escolha *Animar Forma*. Use a seta direita para aumentar a razão de semelhança para 3.

Que acontecerá se a razão de semelhança for positiva e menor que 1? Que acontecerá quando for 0? Que acontecerá quando for negativa?



Clique duas vezes sobre a figura ampliada e anule *Mostrar Linhas de Construção*.

Abra o menu *Editar > Seleccionar Todos os Rabiscos* e faça Delete.



Reflexão

Vamos agora reflectir a figura alargada tendo como eixo a recta $y = x$.



Insira a equação: $y = x$



Use o lápis (*Modo de Rabisco*) para prever a localização das imagens dos vértices depois de uma reflexão tendo como eixo a recta $y = x$.



Selecione a figura alargada e a recta $y = x$, clique no botão direito e escolha *Reflexão*.

Abra o menu *Editar > Seleccionar Todos os Rabiscos* e faça Delete.

Translação

Vamos agora deslocar a figura reflectida segundo o vector .



Marque um ponto a seu gosto, clique no botão direito, escolha *Vector* e insira .



Use o lápis (*Modo de Rabisco*) para prever a localização das imagens dos vértices depois de deslocar a forma segundo o vector .



Selecione a figura reflectida e o vector, clique no botão direito e escolha *Translação*.

Abra o menu *Editar > Seleccionar Todos os Rabiscos* e faça Delete.



Designa os vértices como A', B', C' e D'.



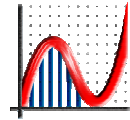
Selecione *Grelha Ajustada às Décimas*.



Na figura original, selecione o ponto A e mova-o, antes de o repor na posição inicial. Que acontece ao ponto A'? Também se move?



Faça o mesmo com os outros três pontos.



Transformações no Espaço

Por causa da terceira dimensão, as transformações geométricas em 3D processam-se de forma ligeiramente diferente. Esta tarefa permite evidenciar essas diferenças.



Abra uma nova página 3D.



Clique Introduzir *Forma* > *Predefinições* e escolha *Octaedro*. 



Selecione e arraste um dos pontos de modo a obter um octaedro irregular. Isto vai facilitar a observação e análise das transformações.

Rotação

Em três dimensões a rotação é feita em torno de uma recta. Iremos fazer uma rotação de 90° em sentido directo em torno do eixo dos zz .



Selecione a figura, clique no botão direito e escolha *Rotação sobre eixo z*, mudando o ângulo para 90°.



Selecione a figura rodada e escolha *Animar Objecto*. Use a seta direita para aumentar o ângulo de rotação para 180°.

Ampliação

Em três dimensões o centro da ampliação continua a ser um ponto.



Marque o ponto de coordenadas (0, 0, 0).



Selecione a figura rodada e o ponto, clique no botão direito e escolha *Ampliação*.




Selecione a figura ampliada, clique no botão direito e escolha *Animar Forma*. Use a seta direita para aumentar a razão de semelhança para 3.

Reflexão

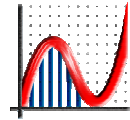
Em três dimensões a reflexão é feita relativamente a um plano.



Insira a equação: $y = x$ 



Selecione a figura ampliada e o plano $y = x$, clique no botão direito e escolha *Reflexão*.



Teorema do Ângulo ao Centro

Vamos explorar a relação entre as amplitudes de um ângulo ao centro e de um ângulo (com vértice em qualquer ponto da circunferência) inscrito no mesmo arco.



Abra uma nova página 2D.

Abra o menu *Eixos* e anule *Mostrar Tecla*.



Selecione *Graus*.



Selecione *Modo de Aspecto Igual*.



Remova os *Eixos*.



Marque um ponto qualquer, clique no botão direito, escolha *Círculo (Raio)* e defina o valor do raio como 3,5.



Designe o ponto como O.



Marque três pontos sobre a circunferência.



Clique duas vezes sobre cada ponto e altere o *t-incremento* para 1.



Designe os pontos como A, B e C.



Trace os segmentos de recta [AB], [BC], [OA] e [OC].

Qual é o ângulo inscrito? E o ângulo ao centro?

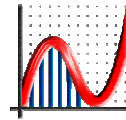


Selecione os pontos A, B e C, clique no botão direito e escolha *Ângulo*. Repita para A, O e C, escolhendo *Permitir Ângulo Reflexo*.



Desloque os pontos A e B sobre a circunferência.

Que observa? É capaz de fazer alguma conjectura sobre a relação entre as amplitudes do ângulo ao centro e do ângulo inscrito no mesmo arco? Consegue demonstrar a sua conjectura? Como o pode fazer usando o Autograph?



Vectores no Plano



Abra o Autograph no Nível Padrão.

Abra o menu *Eixos* e anule *Mostrar Tecla*.



Abra uma nova página 2D.



Defina $-15 \leq x \leq 15$ e $-10 \leq y \leq 10$; defina 1 para os intervalos entre marcas.



Selecione o *Modo de Aspecto Igual*.



Insira os pontos de coordenadas (10, 5), (10, 3) e (10, 1).



Selecione o ponto (10, 5), clique no botão direito, escolha *Vector* e insira $\mathbf{a} =$.



Selecione o ponto (10, 3), clique no botão direito, escolha *Vector* e insira $\mathbf{b} =$.




Selecione o ponto (10, 1), clique no botão direito, escolha *Vector* e insira $\mathbf{c} =$.




Insira o ponto de coordenadas (-10, -5).




Selecione este ponto e o vector \mathbf{b} , clique no botão direito e escolha *Copiar Vector*. 



Selecione o extremo do vector copiado e o vector \mathbf{c} , clique no botão direito e escolha *Multiplicar Vector*, alterando o factor para 3. 



Selecione o ponto (-10, -5), a cópia do vector \mathbf{b} e o vector $3\mathbf{c}$, clique no botão direito e escolha *Adicionar Vectors*. 

Repita para os vectores:

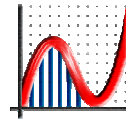
(i) $3\mathbf{c} + \mathbf{a}$

(ii) $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$

(iii) $\mathbf{c} - 2\mathbf{b}$

(iv) $\mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$

(v) $\frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a})$



Vectores no Espaço

Esta tarefa incide sobre as equações vectoriais da recta $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ e do plano $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}$.



Abra uma nova página 3D.

Abra o menu *Ver > Preferências > Traçado* e escolha *Todas as Linhas Espessas, 2¼ pt.*



Insira os pontos de coordenadas (0, 0, 0) e (1, 1, 2).



Selecione (0, 0, 0), depois (1, 1, 2), clique no botão direito, escolha *Criar Vector (a)*.



Use *Arrastar* para observar o vector de diferentes ângulos.



Selecione *Orientação x-y-z* para repor a vista original.




Insira os pontos de coordenadas (-2, -3, 2) e (-1, -2, 3).




Selecione (-2, -3, 2), depois (-1, -2, 3), clique no botão direito, escolha *Criar Vector (b)*.




Selecione o vector **b** e o extremo do vector **a**, clique no botão direito e escolha *Multiplicar Vector*, mudando o factor para λ . Obtém assim o vector $\lambda \mathbf{b}$. 

Use Alt-L para inserir λ .




Selecione o ponto (0, 0, 0) e os vectores **a** e $\lambda \mathbf{b}$, clique no botão direito e escolha *Adicionar Vectores*. Obtém assim o vector $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$. 



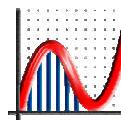
Selecione o vector $\lambda \mathbf{b}$ e o extremo do vector **a**, clique no botão direito e escolha *Linha do Vector*. 



Use o *Controlador de Constantes* para alterar o valor de λ . Observe com atenção o extremo do vector **x**. 



Insira os pontos de coordenadas (0, -2, 2) e (0, -1, 3).




Tarefas com o Autograph




Selecione $(0, -2, 2)$, depois $(0, -1, 3)$, clique no botão direito, escolha *Criar Vector (c)*.




Selecione o vector **c** e o extremo do $\lambda \mathbf{b}$, clique no botão direito e escolha *Multiplicar Vector*, mudando o factor para μ . Obtém assim o vector $\mu \mathbf{c}$. 

Use Alt-m para inserir μ .




Selecione o ponto $(0, 0, 0)$ e os vectores **a**, $\lambda \mathbf{b}$ and $\mu \mathbf{c}$, clique no botão direito e escolha *Adicionar Vectores*. Obtém assim o vector $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}$. 



Selecione os vectores $\lambda \mathbf{b}$ e $\mu \mathbf{c}$ e o extremo do vector **a**, clique no botão direito e escolha *Plano*. 



Use o *Controlador de Constantes* para alterar os valores de λ e μ . Observe com atenção o extremo do vector **y**. 

Como desenvolvimento desta tarefa vamos investigar o plano $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{a}|^2$.



Abra uma nova página 3D.




Insira os pontos de coordenadas $(0, 0, 0)$ e (a, b, c) .



Selecione $(0, 0, 0)$, depois (a, b, c) , clique no botão direito, escolha *Criar Vector (a)*.




Insira a equação: $ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$ 




Marque um ponto sobre o plano.

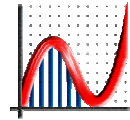


Selecione o extremo do vector **a** e o ponto no plano, clique no botão direito e escolha *Criar Vector*. 



Selecione a origem dos eixos e os dois vectores, clique no botão direito e escolha *Adicionar Vector*. Obtém assim o vector **x**. 

Qual é o valor do produto escalar dos vectores **x** e **a**?



Folhas de Pontos

Pode haver alturas em que é necessário preparar antecipadamente ficheiros que se pretendem usar numa aula: por exemplos, folhas de pontos para o desenvolvimento de tarefas geométricas.




Abra uma nova página 2D.



Selecione *Modo de Aspecto Igual*. No menu *Eixos* confirme *Definições de Ajuste* para 1.



Insira a equação: $x = r\cos\theta + a - \text{mint}(a/m)$; $y = r\sin\theta + \text{int}(a/m)$ 
Escolha *Editar Constantes* e defina $r = 0,05$ e $m = 3$.

Obtém um “ponto” definido pela circunferência de centro $(a - \text{mint}(a/m), \text{int}(a/m))$.



Use o *Controlador de Constantes* para fazer variar o valor de a entre 0 e 11: clique em *Opções* e escolha *Gráfico da Família de Funções*; defina *Início* 0, *Fim* 11 e *Incremento* 1.



Use o *Controlador de Constantes* para fazer variar o valor de m entre 1 e 12.

Com este ficheiro pode criar qualquer matriz de pontos rectangular: o valor de m representa o número de colunas e o máximo de a é dado pelo número total de pontos menos 1.



Abra uma nova página 2D.




Selecione *Graus*.



Selecione *Modo de Aspecto Igual*.



Insira a equação: $x = r\cos\theta + s\cos\alpha$; $y = r\sin\theta + s\sin\alpha$ 
Escolha *Editar Constantes* e defina $r = 0,05$ e $s = 2$.



Use o *Controlador de Constantes* para fazer variar o valor de α entre 0 e 360: clique em *Opções* e escolha *Gráfico da Família de Funções*, defina *Início* 0, *Fim* 360 e *Número* 12.

Altere os valores de *Número*. Que observa?

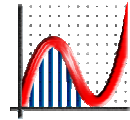


Insira a equação: $x = s\cos\theta$; $y = s\sin\theta$



Selecione a circunferência maior, clique no botão direito, escolha *Tabela de Valores* e mude *t-incremento* para 30. Clique de novo no botão direito e escolha *Ocultar Objecto*.

Altere os valores de s . Que observa?



Os Pesos dos Bebés

O ficheiro *baby-weights.xls* reúne um conjunto de dados relativos a 1174 bebés nascidos numa maternidade do Reino Unido. Pretendemos modelar os dados usando a distribuição normal e calcular a probabilidade de um bebé pesar mais que 10 libras à nascença.



Abra uma nova página de Estatística.



Clique em Introduzir *Dados em Bruto*.



Em Excel abra o ficheiro *baby-weights.xls* e copie a coluna “Birth Weights (lb)”.




No Autograph, clique com o botão direito na coluna *Dados* e faça Copiar. Escolha *Usar como Nome do Conjunto de Dados* e *Usar com Rótulo do Eixo x*. Observe \oplus na Chave.

Até agora apenas introduzimos os dados em bruto. Para construir um histograma é necessário agrupá-los.


Posicione o cursor em qualquer ponto da página, clique no botão direito e seleccione *Conjunto de Dados do Grupo*. Altere a *Amplitude da Classe* para 1. Observe \oplus na Chave.



Selecione *Histograma* e escolha *Densidade da Frequência*. 


Vamos agora ajustar uma curva normal a estes dados.



Clique *Distribuição de Probabilidade*, escolha *Normal* e *Ajustar aos Dados*. 

Segundo o modelo, vamos determinar a probabilidade do peso dum bebé ser superior a 10 libras.



Clique *Cálculo de Probabilidades*, seleccione *Cumulativo $\geq 7,47$* . A probabilidade do peso à nascença ser superior a 7,47 é mostrada na barra de estado. 

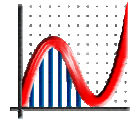


Clique e arraste o quadrado amarelo de 7,47 para 10.



Clique na *Caixa de Texto* para apresentar o valor calculado da probabilidade.

O ficheiro *baby-weights.xls* inclui outros dados que permitem pesquisar, por exemplo, a relação entre hábitos tabágicos da mãe e o peso do bebé à nascença.



Diagramas de Dispersão

É possível importar um conjunto de dados bivariados para o Autograph, mas nesta tarefa vamos aprender a criar um conjunto de dados a partir de pontos disperses e usar esse mesmo conjunto para observar a recta de regressão determinada pelo método dos mínimos quadrados.



Abra uma nova página 2D.

Abra o menu *Eixos* e anule *Mostrar Tecla*.



Defina os eixos para $0 \leq x \leq 10$ e $0 \leq y \leq 10$.




Marque cerca de 10 pontos distribuídos de forma a sugerir correlação positiva.

Clique no botão direito e escolha *Seleccionar Todos os Pontos*. Clique de novo no botão direito e seleccione *Converter em Conjunto de Dados*.

Uma das medidas estatísticas mais importantes de qualquer conjunto de dados é a média.



Selecione o conjunto de dados, clique no botão direito e escolha *Média*. 

Vamos agora ajustar uma recta ao conjunto de dados.



Marque um ponto aleatório, afastado do conjunto de dados.



Selecione esse ponto e a media, clique no botão direito e escolha *Recta*.



Selecione a recta e o conjunto de dados, clique no botão direito e escolha *Residuais y-sobre-x*. O valor da soma dos quadrados dos resíduos é mostrado na barra de estado.



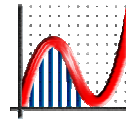
Procure minimizar essa soma deslocando o ponto aleatório. Observe o ajuste da recta ao conjunto de dados.



Selecione o conjunto de dados, clique no botão direito e escolha *Linha de Regressão y-sobre-x*. Compare com a recta que traçou.



Pressione Ctrl enquanto clica e arrasta um ponto do conjunto de dados. Observe o que acontece aos quadrados dos resíduos.



Aproximações Normal e de Poisson à Distribuição Binomial

As distribuições normal e de Poisson podem ser ambas utilizadas como aproximações da distribuição binomial, mas para que valores de n e p pode essa aproximação ser considerada adequada?



Abra uma nova página de Estatística.



Clique *Distribuição de Probabilidade*, escolha *Binomial* e insira $n = 20$ e $p = 0,25$.



Defina os eixos para $0 \leq x \leq 30$ e $0 \leq y \leq 1$.

Tem-se $\text{Binomial}(n, p) \approx \text{Poisson}(np)$ para valores de n suficientemente grandes e valores de p suficientemente pequenos, mas o que acontece quando os valores de n e de p variam?

Clique com o botão direito e seleccione *Ajustar Poisson – Dependente*.



Selecione a distribuição binomial e escolha *Animar Objecto*. Defina o incremento de n primeiro como 1 e depois como. Defina o incremento de p como de 0,05.



Que observa? Para que valores de n e p se obtém a melhor aproximação?

Se np e $n(1 - p)$ forem suficientemente grandes, $\text{Binomial}(n, p) \approx \text{Normal}(np, np(1 - p))$. Vamos de novo pesquisar para que valores de n e p se pode considerar verdadeira a afirmação anterior

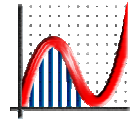
Clique com o botão direito e seleccione *Ajustar Normal – Dependente*.



Selecione a distribuição binomial e escolha *Animar Objecto*. Defina o incremento de n primeiro como 1 e depois como. Defina o incremento de p como de 0,05.



Que observa? Para que valores de n e p se obtém a melhor aproximação?



O Teorema do Limite Central

O Teorema do Limite Central afirma que a soma de muitas variáveis independentes aleatórias e com mesma distribuição de probabilidade tende sempre para uma distribuição normal. Para uma amostra suficientemente grande, a distribuição de probabilidade da média amostral pode ser aproximada por uma distribuição normal, com média e variância iguais às da população.



Abra uma nova página de Estatística.


Vamos começar por gerar dados a partir do lançamento virtual de dados.



Clique *Inserir Dados Agrupados*. Em *Intervalos de Classe* escolha *Dados Inteiros* e insira 1-6. Em *Tipo de Dados* escolha *Discreto*. Em *Frequência* escolha *Usar Dados em Bruto* e clique *Editar*.

Clique *Seleccionar Distribuição* e escolha *Utilizador (discreto)*. Clique *Editar Distribuição* e insira 0; 1/6; 1/6; 1/6; 1/6; 1/6; 1/6. Clique *Criar Amostra*. Posicione o cursor sobre o título da coluna, clique no botão direito e mude para “Lançamento do Dado”. Escolha *Usar como Nome do Conjunto de Dados* e *Usar com Rótulo do Eixo x*.



Selecione *Histograma* e escolha *Densidade da Frequência*. 



Clique *Médias da Amostra*.

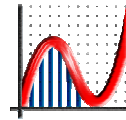
Escolha *Amostra Única*. Isto irá gerar uma amostra de dimensão 5 a partir do conjunto de resultados do lançamento dos dados. Os valores da amostra são indicados pelas setas pretas e a média é representada pelo quadrado azul. Escolha *Limpar Amostras*.

Escolha *Amostra* para gerar 100 amostras de dimensão 5. As médias são todas registadas e apresentadas sob a forma de um gráfico de pontos.

Compare o valor da média das médias das amostras com o valor da média do conjunto inicial de dados. Compare também o desvio-padrão das médias das amostras com o quociente entre o desvio-padrão e a raiz quadrada da dimensão do conjunto inicial de dados.

Clique em *Amostra* mais algumas vezes. Quando o gráfico de pontos deixar de caber no ecrã, clique *Editar Traçado de Pontos* e altere o espaçamento vertical para 0,1.

Continue a clicar *Amostra* até que o número de médias das amostras seja 3000.



Introdução à Derivação



Abra uma nova página 2D.



Active o *Modo de Traçado Lento*.



Insira a equação: $y = x^3 - 3x - 1$



Clique imediatamente no botão de *Pausa no Traçado*.



Os alunos podem usar o lápis (*Modo de Rabisco*) para assinalar alguns pontos notáveis (intersecção do gráfico com os eixos, máximos, mínimos, ...), prever o que acontece quando x tende para $+\infty$ ou $-\infty$, a forma genérica da curva, etc.



Clique novamente no botão de *Pausa no Traçado*.

No menu *Editar > Seleccionar Todos os Rabiscos* e pressione Delete.



No *Modo de Ponto*, desloque o cursor sobre a curva até ver uma seta preta. Clique no botão esquerdo para definir um ponto sobre a curva.



Selecione o ponto, clique no botão direito e selecione *Tangente*.

O que acontece à tangente no(s) máximo(s), no(s) mínimo(s) e no(s) ponto(s) de inflexão?



Selecione e arraste o ponto para $x = -2$.



Seja y o valor do declive da tangente; use o lápis para marcar o ponto da curva que tem abcissa $x = -2$ e ordenada y .

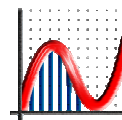
Repita o procedimento para $x = -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2$.



Clique em *Função Gradiente*.

Será que o gráfico desta função passa por todos os pontos que marcou?

No menu *Editar > Seleccionar Todos os Rabiscos* e pressione Delete.



Tarefas com o Autograph



Clique duas vezes sobre a curva e altere-a para: $y = x^3 - ax - 1$
Selecione *Editar Constantes* e defina $a = 3$.

O que irá acontecer se a aumentar para 3.1?



Use o lápis para registar a sua previsão.



Use o *Controlador de Constantes* para alterar o valor de a para 3.1.

A sua previsão confirma-se?

No menu *Editar > Seleccionar Todos os Rabiscos* e pressione Delete.

O que irá acontecer para $a = 0$?

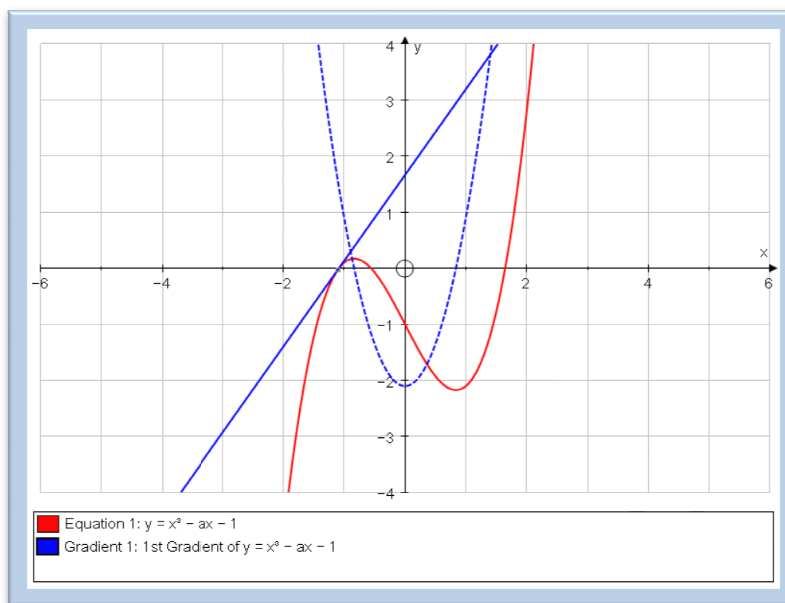


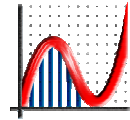
Use o lápis para registar a sua previsão.



Use o *Controlador de Constantes* para alterar o valor de a para 0.

A sua previsão confirma-se?





Derivação de Funções Trigonométricas

Vamos começar por traçar a função seno e a sua derivada em graus e como motivação para a introdução dos radianos.




Abra uma nova página 2D.



Clique *Graus*.



Insira a equação: $y = \sin(x)$ 




Clique *Escala Predefinidas*.



Active o *Modo de Traçado Lento*.



Clique *Função Gradiente*. 



O gráfico irá ser traçado lentamente, com pausas nos pontos notáveis. Clique *Pausa no Traçado* para retomar o traçado.

Esperava observar este traçado? Esperava que a amplitude da curva do co-seno fosse 1? Qual é o valor da derivada no ponto $x = 0$?



Use *Ampliar y* para aproximar no ponto $(0, 0)$.



No *Modo de Ponto*, desloque o cursor sobre a curva até ver uma seta preta. Clique no botão esquerdo para definir um ponto sobre a curva.



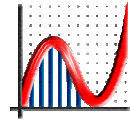
Selecione o ponto e desloque-o para $x = 0$.

O valor de y é $\pi/180$ porque em graus tem-se que:



Clique em *Radianos* e em *Escala Predefinidas*.

O que observa? Esta representação é-lhe mais familiar?



Calcular a Área sob a Curva

Como se pode calcular a área A sob uma curva $y = f(x)$ entre os pontos $x = a$ e $x = b$? Podemos dividir o intervalo em n intervalos menores e aproximar cada um destes a um rectângulo.




Abra uma nova página 2D.



Defina os eixos para $0 \leq x \leq 8$ e $0 \leq y \leq 7$.



Insira a equação: $y = (x - 2)^2 + 1$ 



Marque pontos na curva em $x = 1$ e $x = 4$.



Selecione dois pontos, clique no botão direito e escolha *Encontrar Área*. Escolha *Rectângulo (+)* e defina *Ponto Inicial 1*, *Ponto Final 4*, *Número de Intervalos 1*.

A aproximação é péssima... como podemos melhorá-la?



Selecione o rectângulo e clique em *Animar Objecto*. O que irá acontecer à aproximação se o número de intervalos aumentar para 2? Aumente o número de intervalos para 100. Observe com a aproximação melhora à medida que aumenta o número de rectângulos.

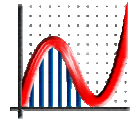
Consegue distinguir a área dos 100 rectângulos da área sob a curva? Podemos concluir que são idênticas?



Faça *Ampliar* sobre a parte superior de um dos rectângulos.

Portanto, aumentar o número de rectângulos melhora a aproximação mas há sempre algum erro. Esta é a oportunidade de apresentar aos alunos a fórmula:

É importante ter usado rectângulos para chegar a este resultado? Não, apenas se usaram rectângulos para facilitar a observação e o raciocínio. Experimente repetir a tarefa usando trapézios. Que verifica?



Uma Cabra a Pastar Metade de um Campo Quadrado

Uma cabra está presa por uma corda a um poste situado no ponto médio do lado de um quadrado com 1 metro de lado. Qual deve ser o comprimento (r) da corda para que a cabra paste exactamente metade da área do quadrado? Esta é uma aproximação numérica para resolução do problema.



Abra uma nova página 2D.



Defina os eixos para $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1,5$; defina os intervalos entre marcas como 0,1.




Selecione *Modo de Aspecto Igual*.



Insira os pontos de coordenadas $(-0,5; 0)$, $(-0,5; 1)$, $(0,5; 1)$ e $(0,5; 0)$; clique no botão direito e escolha *Agrupar na Forma*.

Qual é a equação que traduz o comprimento máximo da corda?



Insira a equação: $x^2 + y^2 = r^2$ 



Selecione a curva, clique no botão direito e escolha *Encontrar Área*. Escolha *Regra de Simpson* e defina *Ponto Inicial* -0,5, *Ponto Final* 0,5 e *Número de Intervalos* 50.

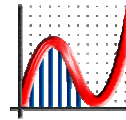


Selecione a área (pode ter de clicar duas vezes, já que o quadrado será seleccionado primeiro) e escolha *Caixa de Texto*.



Use o *Controlador de Constantes* para alterar o valor de r até obter área $A = 0,5$. Vai ter de alterar o incremento, de forma a obter a melhor aproximação possível. Para um resultado ainda mais preciso, abra o menu *Página > Editar* e altere o *Número de Algarismos Significativos* para 8.

Era esta a solução que esperava? Consegue resolver o problema de forma algébrica?



Volumes de Revolução

Os conceitos anteriores relativos a áreas também se aplicam a volumes de revolução. Vamos supor que a região sob a curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ roda em torno do eixo dos x de forma a gerar um sólido. Qual é o volume desse sólido? Como obter um valor aproximado desse volume?




Abra uma nova página 3D.




Defina os eixos para $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$ e $-5 \leq z \leq 5$.



Insira a equação: $y = (x - 2)^2 + 1$ 
Escolha *Traçado como Equação 2D*.



Selecione *Orientação x-y* (para ver, clique na setinha preta à direita de ).



Selecione a curva, clique no botão direito e escolha *Encontrar Área*. Selecione *Rectângulo (+)* e defina *Ponto Inicial 1*, *Ponto Final 1* e *Número de Intervalos 1*.



Active o *Modo de Traçado Lento*.



Selecione a área, clique no botão direito e escolha *Calcular Volume*.

Que sólido está a ser gerado? Qual é o seu volume?

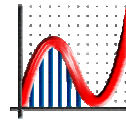


Clique e arraste para observar bem o sólido.



Selecione o cilindro e clique *Animar Objecto*. Abra o menu, escolha *Intervalos* e aumente o número para 100. Observe como a aproximação melhora conforme aumenta o número de cilindros.

Esta é uma boa oportunidade para apresentar aos alunos a fórmula:



A Função Exponencial



Abra uma nova página 2D.



Insira a equação: $y = a^x$



Escolha *Editar Constantes* e defina $a = 2$.

Use Alt-x para inserir x .



Marque um ponto sobre a curva, clique no botão direito e escolha *Tangente*.



Use o lápis para assinalar o valor da tangente em $x = -2, -1, 0, 1, 2$.



Active o *Modo de Traçado Lento*.



Clique em *Função Gradiente*.



Clique imediatamente no botão de *Pausa no Traçado*.



Clique novamente no botão de *Pausa no Traçado*.

A expressão da função derivada é $y = a^x \ln(a)$, que intersecta o eixo dos y em $y = \ln(a)$.



Insira a equação: $y = \ln(a)$



Use o *Controlador de Constantes* para fazer variar o valor de a .



Amplie e altere o valor de a até que a função derivada se sobreponha à função original.

Para que valor de a (com 4 casas decimais) ocorre essa sobreposição?

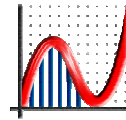


Clique em *Escalas Predefinidas*.

Qual é o valor de $\ln(a)$ para este valor de a ?



Defina $a = e$ no *Controlador de Constantes*.



A Bala Humana



Abra uma nova página 2D.



Clique em *Graus*.



Clique no botão direito, escolha Inserir Imagem e seleccione *human-cannonball.jpg*.




Clique duas vezes sobre a imagem, limpe a selecção em *Escalar Imagem com Eixos* e aumente a transparência para 50%.



Desloque a imagem para que o canhão assente sobre o eixo dos xx e a boca do canhão toque o eixo dos yy.



Insira a equação: $x = (u \cos \alpha)t$; $y = (u \sin \alpha)t - gt^2/2 + h$ 


Clique em *Editar Constantes* e defina $g = 9,8$, $u = 1$ e $\alpha = 30$.

Clique em *Opções de Arranque* e defina $t\text{-inicial} = 0$, $t\text{-final} = 2$ e $t\text{-incremento} = 0,01$.



Selecione a parábola, escolha *Caixa de Texto* e assinale *Mostrar Texto Detalhado do Objecto*.



Use o *Controlador de Constantes* para fazer variar os valores de h , u e α até que a curva coincida com a trajectória da “bala humana”. 



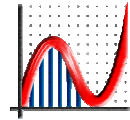
Selecione a curva, clique no botão direito e escolha *Editar Opções de Desenho*. Altere o *Estilo* para tracejado e a *Espessura* para 6pt.



Active o Modo de Traçado Lento.



Clique em *Recomeçar Traçado*.



Velocidade Terminal

A força de resistência ao ar de um objecto em queda aumenta com a aceleração. A velocidade terminal é atingida quando a força de resistência é igual à força da gravidade – logo a força resultante é nula.



Abra uma nova página 2D.



Em *Eixos > Editar Eixos* defina os eixos para $0 \leq x \leq 40$ e $0 \leq y \leq 50$. No separador *Rótulos* altere a variável horizontal para t e a variável vertical para v . Altere os rótulos para “Tempo (s)” e “Velocidade (ms^{-1})”, respectivamente. No separador *Aspecto* altere o *Tema* para *Papel para Diagramas*.



Insira a equação: $m\dot{v} = mg - kv^n$



Clique em *Editar Constantes* e defina $m = 80$, $n = 2$ e $g = 9,8$.

Use v' para inserir \dot{v} e use Alt-n para inserir n .

O declive do campo traçado representa o gradiente de soluções desta equação. Para uma solução particular é necessária uma condição inicial ou uma condição limite. Vamos começar por assumir que a velocidade inicial é nula.



Active o *Modo de Traçado Lento*.

Clique no ponto onde $t = v = 0$.

Vamos agora experimentar diferentes condições iniciais. O que acontece quando a velocidade inicial é maior do que a velocidade terminal?

Clique duas vezes sobre a equação e seleccione *Opções de Arranque*. Escolha *Conjunto de Pontos* e seleccione *Introduzir Pontos Iniciais*. Clique em *eixo-y*.



Use o *Controlador de Constantes* para pesquisar os efeitos de variação de n e k .

