UTILIZAÇÃO DE SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA NO ESTUDO DAS ISOMETRIAS

ÁGUAS SANTAS – 7 SETEMBRO DE 2011

ISOMETRIAS
NO PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO

"… as tarefas que envolvem as isometrias do plano devem merecer atenção especial (…) pois permitem a aprendizagem de conceitos geométricos de forma dinâmica e o aprofundamento da sua compreensão"

Programa de Matemática do Ensino Básico, 2007, p. 36

"As isometrias permitem desenvolver nos alunos o conceito de congruência (figuras congruentes relacionam-se entre si através de reflexões, rotações, translacções ou reflexões deslizantes. Este tipo de transformações permite a exploração, construção e classificação de frisos e rosáceas. A noção de amplitude de um ângulo e a sua medição em graus, são introduzidas neste ciclo, e têm um papel importante no estudo das rotações e no trabalho com as figuras geométricas.

p.37

ISOMETRIAS
1.º CICLO – 3.º E 4º ANOS

Tópicos	Objectivos Específicos	Notas
Figuras no plano e sólidos geométricos **-** reflexão	• Identificar no plano eixos de simetria de figuras. • Construir frisos e identificar simetrias.	• Propor a exploração de frisos identificando simetrias, de translação, reflexão, reflexão deslizante e rotação (meia-volta).

ISOMETRIAS
2º. CICLO

Tópicos	Objectivos Específicos
Reflexão, Rotação e Translação • Noção e propriedades da reflexão, da rotação e da translação • Simetrias axial e rotacional	• **Identificar**, **predizer** e **descrever** a isometria em causa, dada a figura geométrica e o transformado. • Construir o transformado de uma figura, a partir de uma **isometria** ou de uma **composição de isometrias**. • **Compreender** as noções de simetria axial e rotacional e **identificar** as simetrias numa figura. • Completar, desenhar e explorar padrões geométricos que envolvam simetrias. • Identificar as simetrias de **frisos** e **rosáceas**. • Construir frisos e rosáceas.

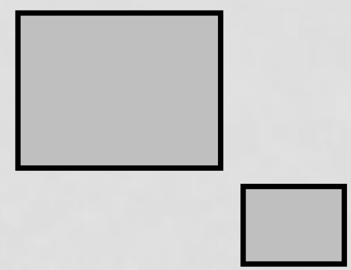
ISOMETRIAS
3.º CICLO

Tópicos	Objectivos Específicos
Isometrias • Translação associada a um vector • Propriedades das isometrias	• Compreender as noções de vector e de translação e identificar e efectuar translações. • Identificar e utilizar as propriedades de invariância das translações. • Compor translações e relacionar a composição de translações com a adição de vectores. • Reconhecer as propriedades comuns das isometrias. • Reconhecer que a translação é a única isometria que conserva direcções.

ISOMETRIAS

Isometria ou **movimento rígido** é uma aplicação que transforma uma figura geométrica numa outra figura congruente.

É isometria



Não é isometria
(homotetia)

ISOMETRIAS

Reflexão

Translação

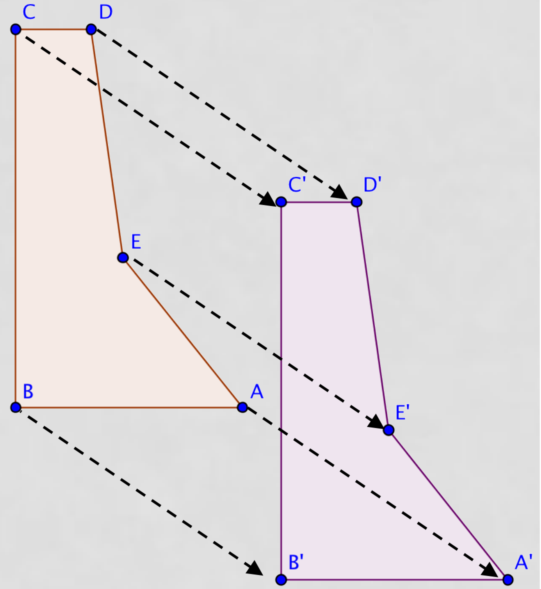
Rotação

Reflexão Deslizante

TRANSLACÇÃO

Chama-se translação associada ao vector $\vec{u}$ e representa-se por $T_{\vec{u}}$ à transformação geométrica que ao ponto P faz corresponder um ponto P′ tal que

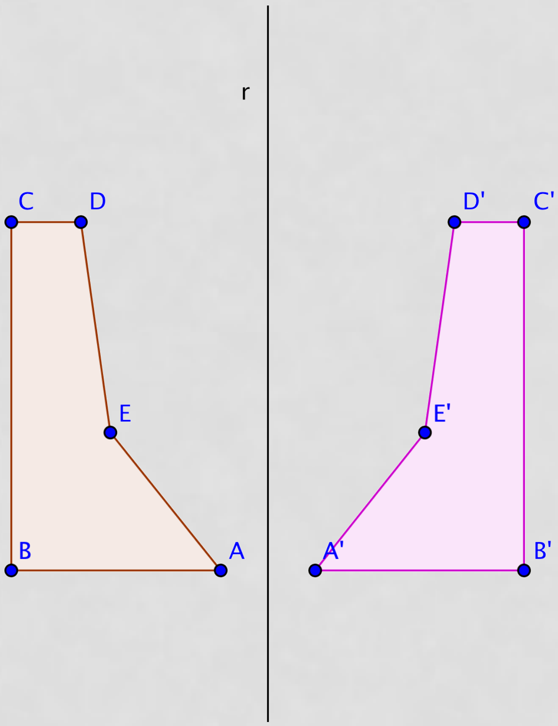
$$P' = P + \vec{u}$$



Numa translação de uma figura, todos os pontos sofrem uma deslocação segundo o mesmo vector ou seja, uma deslocação com a mesma **direcção**, o mesmo **sentido** e o mesmo **comprimento**.

REFLEXÃO

Dada uma recta *r*, dá-se o nome de reflexão sobre *r*, representa-se por R_r , à transformação geométrica que deixa invariantes os pontos de *r* e que, a cada ponto A ∉ *r* faz corresponder um ponto A’ tal que a recta *r* é a mediatriz do segmento de recta [AA’].



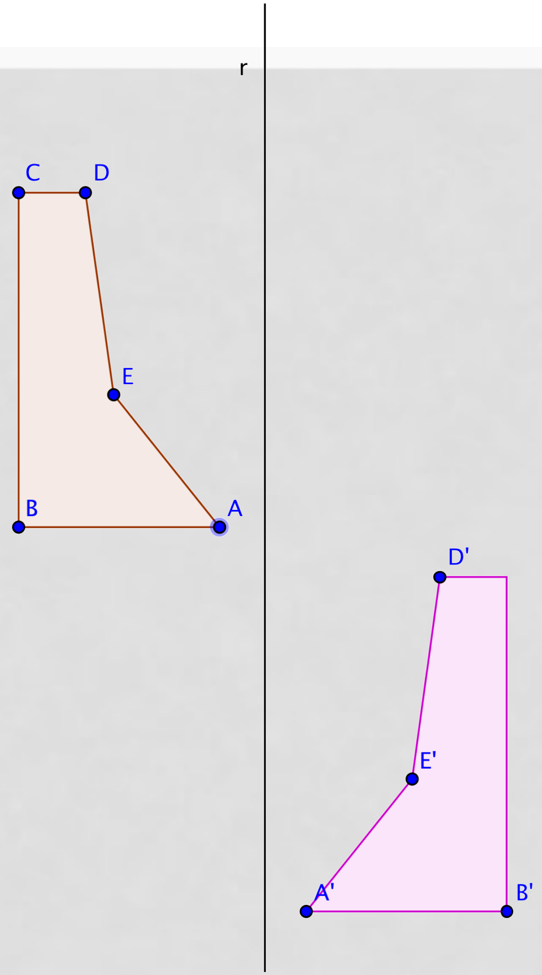
Nestas condições, a recta *r* denomina-se por eixo de reflexão.

REFLEXÃO DESLIZANTE

Chama-se **reflexão deslizante** de eixo *r* e vector associado (com a mesma direcção da recta *r*) à composta de uma reflexão de eixo *r* com uma translação associada ao vector.

A reflexão deslizante representa-se

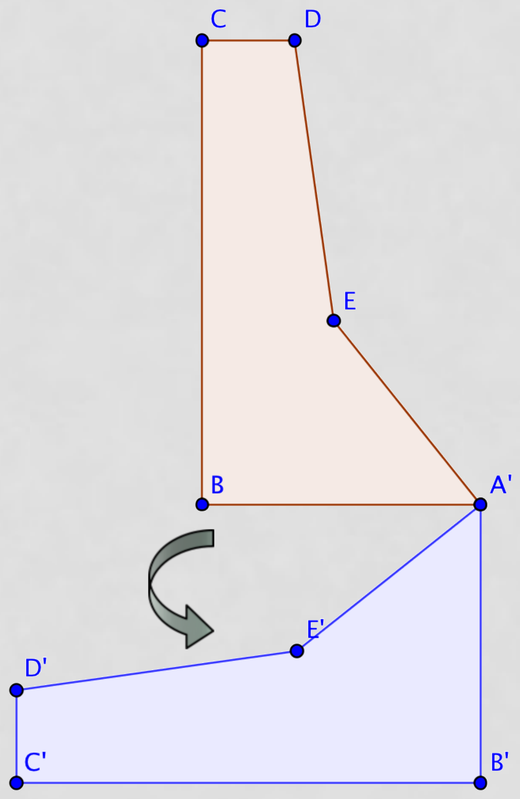
por $R_{r,\vec{u}}$



ROTAÇÃO

Para definir rotação no plano é necessário:

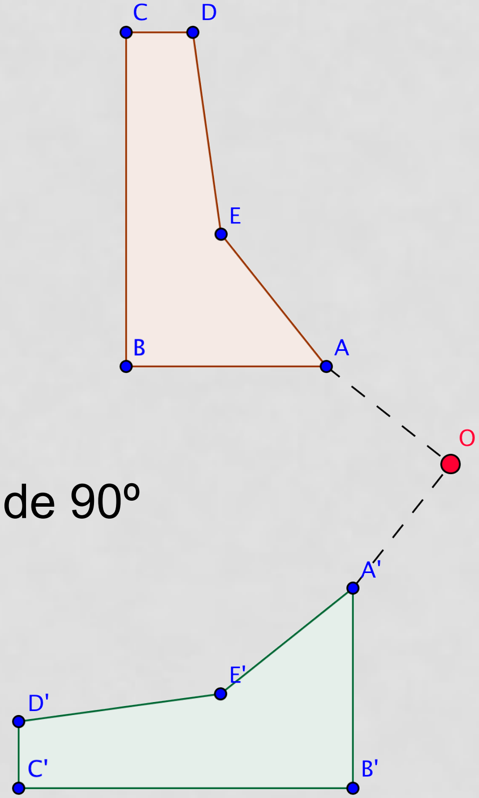
- estipular um ponto em torno do qual se dá a rotação - **centro de rotação**;
- estipular a **amplitude do ângulo** e a sua orientação que pode ser no sentido directo / positivo (contrário ao movimento dos ponteiro do relógio) ou retrógrado.



ROTAÇÃO

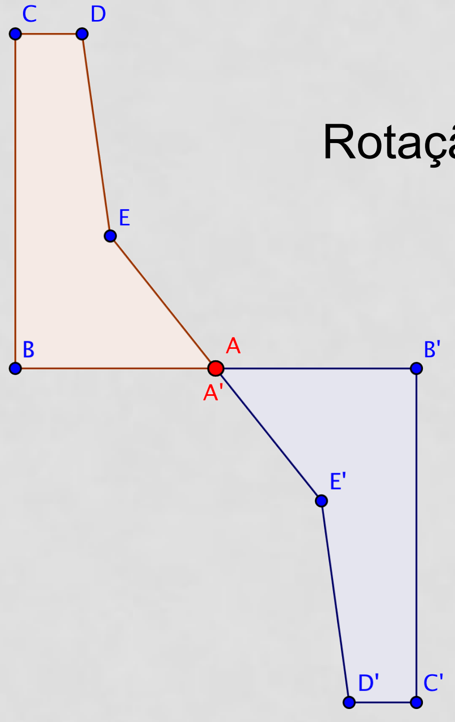
O centro de rotação **não** tem de ser um ponto da figura.

A rotação denota-se por $R_{o,\alpha}$, lendo-se rotação de centro em O e de amplitude α.



Rotação de 90º

Rotação de 180º



SIMETRIAS
DE UMA FIGURA NO PLANO

Simetria de uma figura no plano F é uma isometria T do plano que deixa a figura invariante, de modo que *T(F) = F*

Ou seja, qualquer isometria que **transforme uma dada figura nela própria** diz-se uma simetria dessa figura.

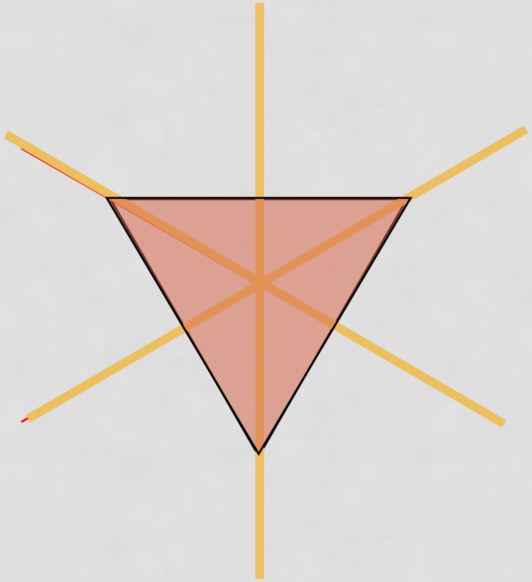
O conjunto de todas as simetrias de uma dada figura diz-se o conjunto simétrico dessa figura.

Desta forma, uma figura pode ter:

- simetria de reflexão;
- simetria de rotação;
- simetria de translação;
- simetria de reflexão deslizante.

SIMETRIA DE ROTAÇÃO

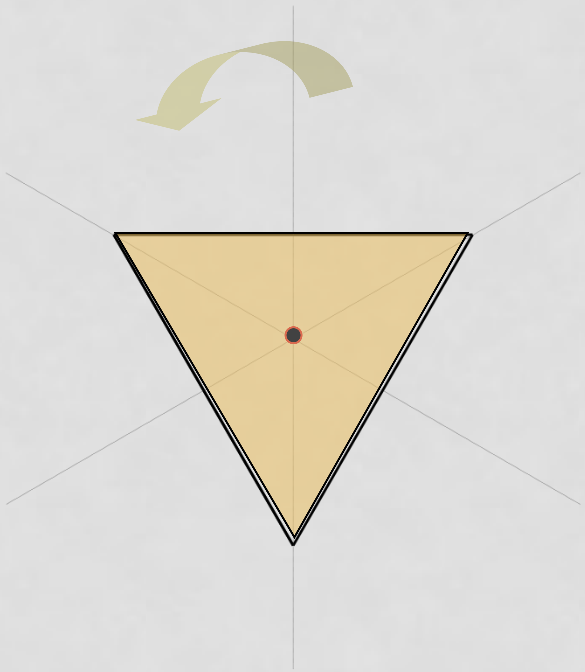
Uma figura tem uma simetria de reflexão segundo uma recta *r* se o transformado da figura por R_r é a própria figura.



Um triângulo equilátero tem 3 eixos de simetria de reflexão

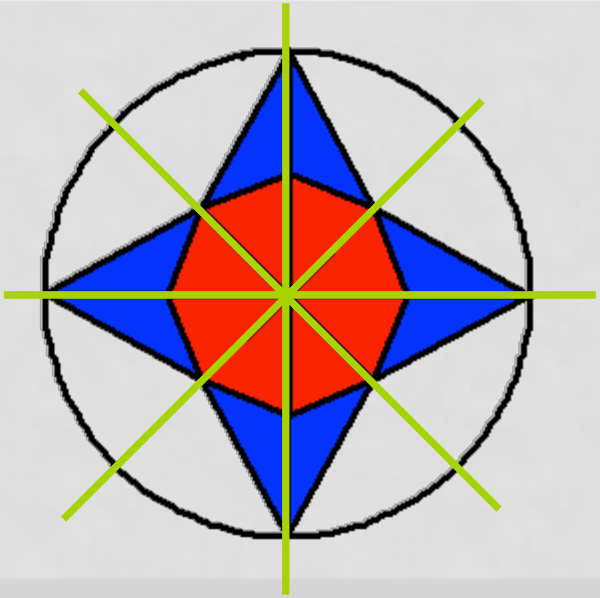
SIMETRIA DE ROTAÇÃO

Uma figura tem uma simetria rotacional de centro em O e amplitude α se o transformado da figura por $R_{O,\alpha}$ é a própria figura.



Um triângulo equilátero tem 3 simetrias de rotação, segundo o ponto C e com medida de amplitude de 120º, 240º e 360º.

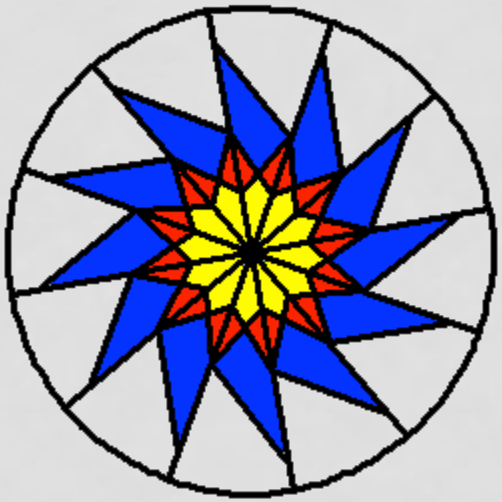
SIMETRIAS EM ROSÁCEAS



4 simetrias de reflexão;

4 simetrias de rotação:

- **centro** C;
- medidas de **amplitude**
  90º, 180º, 270º e 360º;
  - no **sentido** directo.



$R_{O,\alpha}$

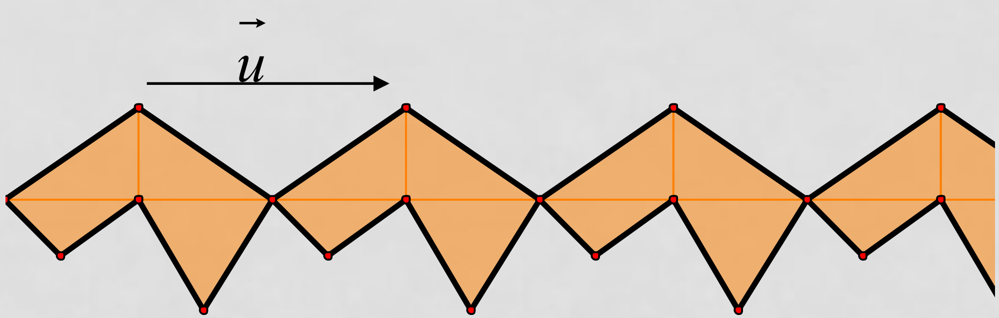
Não tem simetrias de reflexão;

12 simetrias de rotação:

- **centro** O;
- medidas de **amplitude**
  30º, 60º, 90º, …, 330º e 360º;
  - no **sentido** directo.

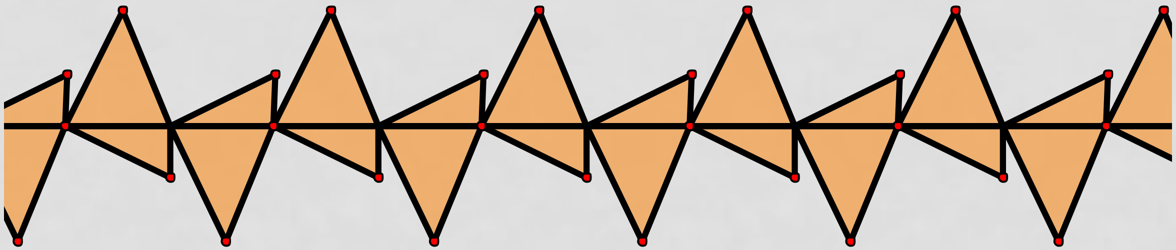
SIMETRIA DE TRANSLACÇÃO

Uma figura tem uma simetria de translação de $\vec{u}$ vector se o transformado da figura por $T_{\vec{u}}$ é a própria figura.



SIMETRIA DE REFLEXÃO DESLIZANTE

Uma figura tem uma simetria de reflexão deslizante se o transformado da figura por uma dada reflexão deslizante é a própria figura.

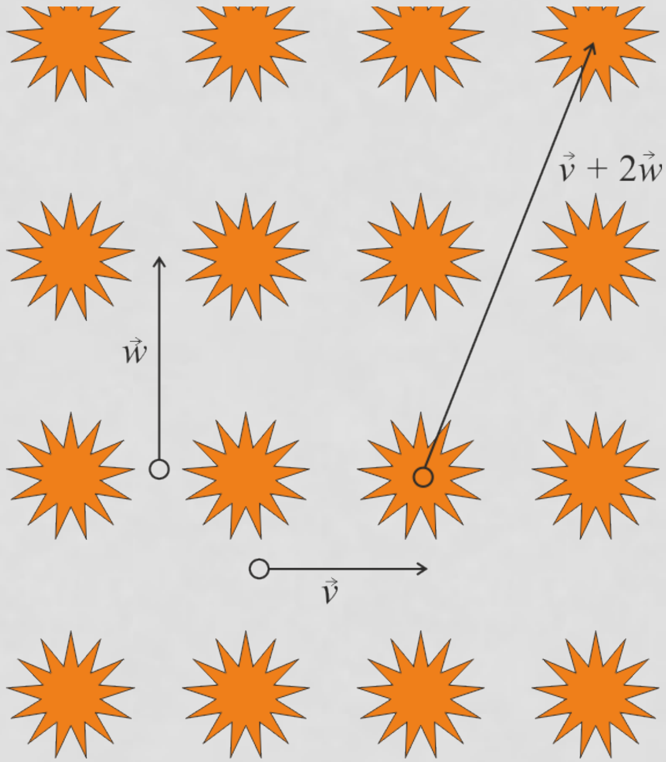


PADRÕES E FRISOS

Padrão

Um desenho traçado sobre o plano é um padrão periódico se:

- Existe um conjunto limitado do plano – motivo – e duas translações linearmente independentes (direcções não paralelas) tais que:
  - ✓ O conjunto de imagens do motivo por meio das transformações do grupo gerado pelas duas translações reproduz o desenho;
  - ✓ existe uma translação, em cada uma das direcções, que deixa o padrão invariante e cujo vector tem módulo mínimo.

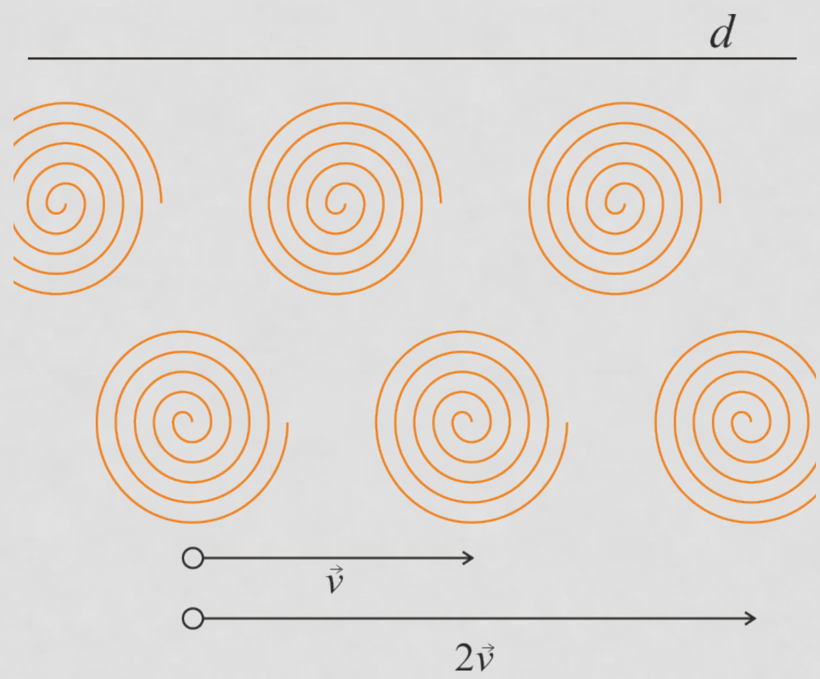


PADRÕES E FRISOS

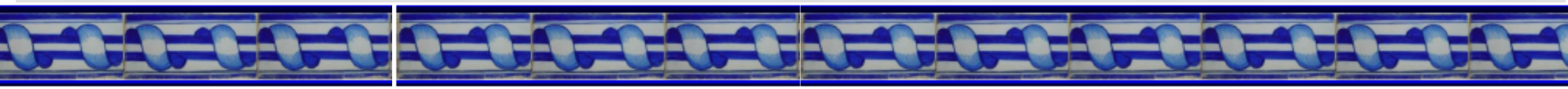
Friso

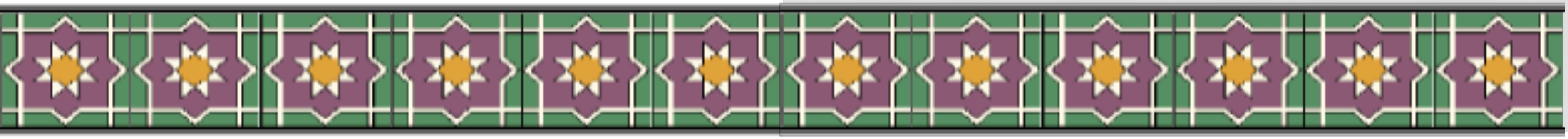
Existem apenas translações segundo uma direcção, e existe uma translação cujo vector tem comprimento mínimo e que deixa o desenho invariante.

O grupo simétrico (conjunto de todas as simetrias de uma dada figura) pode conter outras isometrias para além das translações.



FRISOS





QUESTÕES PEDAGÓGICAS

Em geometria, o desenho funciona como auxílio e suporte do pensamento, mas não pode ser tomado como gerador de relações.

Um desenho não consegue dar conta da variabilidade dos elementos da figura à qual ele está associa

O objectivo do ensino da geometria é de levar o aluno à aquisição de uma rede de relações servindo à expressão de raciocínios, rede na qual as relações são ligadas de forma lógica e dedutiva.

Esta rede de relações deve ser construída pelo próprio aluno, recusando a ideia de receber do professor uma rede relacional completamente pronta.

QUESTÕES PEDAGÓGICAS
QUE SEQUÊNCIA DIDÁCTICA?

Peheram (1978) concluiu que os alunos aprendem as isometrias na seguinte ordem:
Translações ➔ reflexões ➔ rotações

Outras conclusões:
A orientação que apresenta menor dificuldade é a horizontal e a que apresenta maior é a oblíqua.

Nas rotações, apresenta um grau dificuldade maior aquelas em que o centro de rotação não está sobre o objecto a rodar.

TEORIA DE VAN HIELE

figuras

Nível 0 - visual

O raciocínio é dominado pela percepção. Podem distinguir uma figura de outra sem conseguirem indicar uma única propriedade de qualquer de uma delas, ou podem também crer que duas figuras são congruentes por terem a mesma aparência.

Figuras ➔ propriedades

Nível 1- descritivo / analítico

As figuras são vistas como um todo, mas agora como colecções de propriedades, que são estabelecidas experimentalmente. Neste nível, os alunos percebem as relações entre classes de figuras, as propriedades são vistas como independentes umas das outras. Formulam definições com excesso de informações.

Nível 2 - abstracto / relacional propriedades ➔ordenação das propriedades

Há compreensão da existência de relações entre propriedades de diferentes figuras, que são ordenadas logicamente. Os alunos são capazes de de compreender definições, repeti-las ou adaptá-las para situações análogas. São capazes de compreender demonstrações e reproduzir algumas das suas implicações, ou mesmo realizar demonstrações simples.

NÍVEIS DE VAN HIELE

Nível 3: dedução formal ordenação das propriedades ➔ sistema axiomático

Os alunos demonstram teoremas dentro de um sistema axiomático. Reconhecem a diferença entre termos indefinidos, definições, axiomas e teoremas. São capazes de produzir uma sequência de afirmações que justifica, de forma lógica, uma determinada conclusão.

Nível 4: rigor sistema axiomático ➔ lógica

Os alunos raciocinam formalmente sobre sistemas matemáticos. Conseguem estudar geometria na ausência de modelos de referência e raciocinar, manipulando formalmente afirmações geométricas tais como axiomas, definições e teoremas.

BIBLIOGRAFIA

Alsina, C.; Pérez, R.; Ruiz, C. (1989). Simetria Dinamica. Madrid: Editorial Sintesis.

Alves, B. (2008). Transformações Geométricas: Isometrias, In Ema Mamede (Ed.) (2008). *Matemática ao Encontro das práticas – 2.º ciclo* (pp. 169-192). Braga: IEC/UM.

Palhares, P. 2004). Transformações geométricas. In: Pedro Palhares (Ed.), Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico. Lisboa: Lidel.

Ponte, J. P.; Serrazina, L.; Guimarães, H. M.; Brenda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. E. e Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Van de Walle, J. (2007). Elementary and Middle School Mathematics: teaching developmentally. Boston: Pearson Education.

Veloso, E. (1998). *Geometria – Temas Actuais*. Instituto de Inovação Educacional: Lisboa.

António Menino
EB de Vila das Aves

tomenino@gmail.com