Determinismo versus probabilidade

Sílvio Gama

Centro de Matemática da Universidade do Porto

Departamento de Matemática da FCUP

Escola Secundária de Águas Santas, 7 de Setembro de 2011

Um título alternativo seria...

Porquê uma descrição probabilística de sistemas deterministas?

- Em Matemática, o que é um sistema determinista?
  - É um sistema no qual não há aleatoriedade envolvida na evolução futura dos estados do sistema. Assim, um sistema determinista produz sempre o mesmo resultado a partir de um mesmo estado inicial.
- Exemplo de sistema não-determinista:
  - passeio aleatório (por exemplo, o valor de fecho diário do PSI-20), pois a sua evolução depende, em cada instante, de escolhas aleatórias.

- Exemplo de sistema determinista:
  - qualquer lei física descrita por equações diferenciais representa um sistema determinista. Na mecânica dos fluidos, as equações de Navier-Stokes descrevem matematicamente qualquer fluido (um líquido ou um gás; em particular, a atmosfera terrestre), embora os fluidos, em certos regimes, se comportem como não-deterministas.
  - os sistemas estudados na teoria do caos: se o estado inicial for exactamente conhecido, o conhecimento do estado futuro do sistema é completamente determinado/conhecido. Na prática, o estado futuro está limitado pela precisão com que o estado inicial é medido.
    - Princípio da Incerteza de Heisenberg (1927): impõe restrições à precisão com que se podem efectuar medidas simultâneas de uma classe de pares de observáveis:

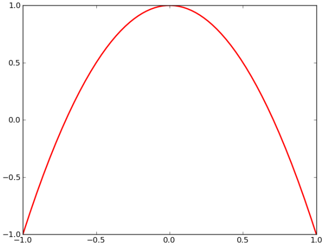
$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Um modelo para o caos determinístico

Iremos ver de perto o sistema determinista dado pela recorrência:

$$v_{n+1} = f\left(v_n\right),$$

sendo $v_0 \in [-1, 1]$ o estado inicial conhecido/dado e $n = 1, 2, 3, \ldots$. Aqui, $f(x) = 1 - 2x^2$.



Definição de órbita

Seja $v_0 \in [-1, 1]$. A órbita de associada a v_0, é a sucessão $v_0, v_{1,} v_{2,} v_{3,} v_{4,} \dots,$ onde

$$\begin{aligned} v_1 &= f(v_0) = 1 - 2v_0^2 \\ v_2 &= f(v_1) = 1 - 2v_1^2 \\ v_3 &= f(v_2) = 1 - 2v_2^2 \\ v_4 &= f(v_3) = 1 - 2v_3^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

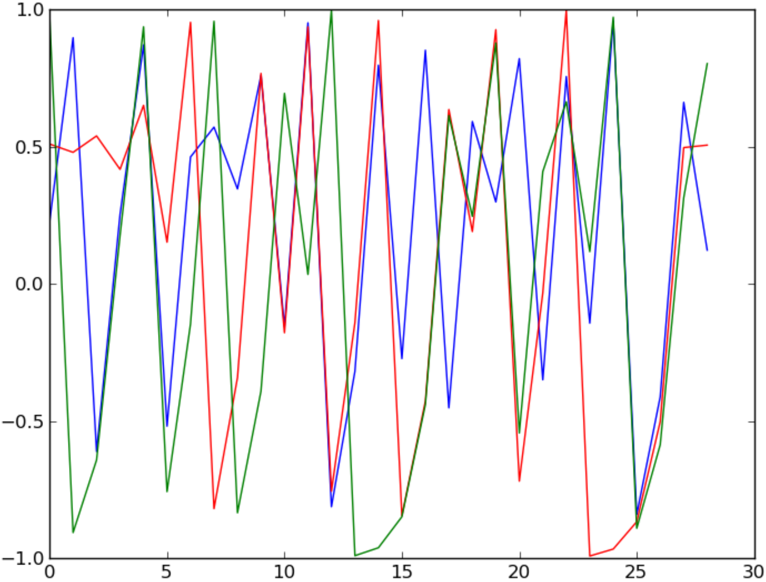
isto é,

$$\begin{aligned} v_1 &= f(v_0) \\ v_2 &= f\left(f\left(v_0\right)\right) \\ v_3 &= f\left(f\left(f\left(v_0\right)\right)\right) \\ v_4 &= f\left(f\left(f\left(f\left(v_0\right)\right)\right)\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

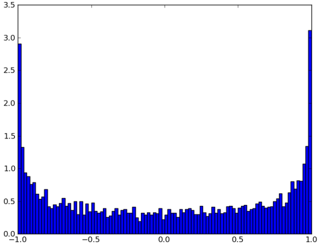
Exemplo de três órbitas

0	0.22643	0.51	0.9762
1	0.8974589102	0.4798	-0.90593288
2	-0.610864990995	0.53958392	-0.64142876613
3	0.253687925554	0.417698386555	0.177138275961
4	0.871284872856	0.651056115739	0.937244062379
5	-0.518274659336	0.152251868318	-0.756852864929
6	0.46278275498	0.953638737187	-0.145652518302
7	0.571664243386	-0.818853682129	0.957570687825
8	0.346399985667	-0.341042705472	-0.833883244362
9	0.76001409986	0.767379746089	-0.390722530456
10	-0.155242863972	-0.177743349415	0.694671808389
11	0.951799306371	0.936814603478	0.0348621572598
12	-0.811843839218	-0.755243202578	0.997569259982
13	-0.318180838552	-0.140784590081	-0.990288856924
14	0.797521907956	0.960359398391	-0.961344040294
15	-0.27208238734	-0.844580348157	-0.848364727618
16	0.851942348998	-0.426631928987	-0.439445422133
17	-0.451611532033	0.635970394338	0.613775441933
18	0.592094048269	0.191083315051	0.24655941376
19	0.298849276009	0.926974333418	0.878416910972
20	0.821378220458	-0.718562829632	-0.543232538964
21	-0.349324362085	-0.0326650802584	0.409796817222
22	0.755944980107	0.997865985063	0.66413313719
23	-0.142905625899	-0.991473048293	0.117854352172
24	0.959155964173	-0.966037610984	0.972220703348
25	-0.839960327216	-0.86645733167	-0.890426192037
26	-0.411066702594	-0.501496615208	-0.585717606932
27	0.662048332038	0.49700228987	0.313869769859
28	0.123384012093	0.505977447727	0.802971535137

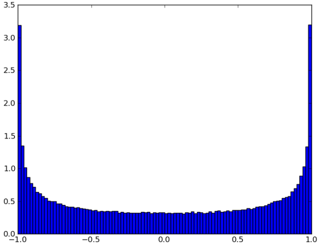
Representação gráfica das órbitas



Histograma das primeiras 5 mil iterações da órbita de $v_0 = 0.7654321$ (histograma com 100 células):



Histograma das primeiras 300 mil iterações da órbita de $v_0 = 0.1234567$ (histograma com 100 células):



Programa, em Python, que produziu os histogramas anteriores:

```
from math import *
from pylab import *

Numero_max_iter = 5000
v_zero = 0.7654321

v = zeros(Numero_max_iter, float)
v[0] = v_zero

for i in range(1, Numero_max_iter):
    v[i] = 1.0 - 2.0 * v[i-1]**2

hist(v, 100, normed=True)

show()
```

Sensibilidade às condições iniciais

Nos casos anteriores, considerámos órbitas de pontos que estavam afastados entre si. Que se passa com as órbitas de pontos muito próximos?

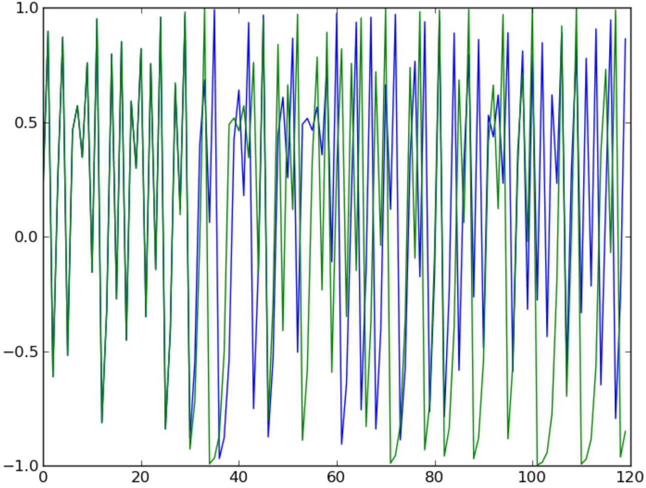
Por exemplo:

- órbita de $v_0 = 0.22643$
- órbita de $y_0 = v_0 + \varepsilon$, com $\varepsilon = 10^{-10}$

As primeiras 120 iterações associadas às órbitas de x_0 e y_0 podem ser esboçadas por este pequeno programa em Python:

```
from pylab import *
n = 120; x = zeros(n, float); y = zeros(n, float)
iter = zeros(n, float)
epsilon = 1.e-10; x[0] = 0.22643; y[0] = x[0] + epsilon
for i in range(1, n):
    iter[i] = float(i)
    x[i] = 1.0 - 2.0 * x[i-1]**2
    y[i] = 1.0 - 2.0 * y[i-1]**2
plot(iter, x, 'b-', linewidth=1)
plot(iter, y, 'g-', linewidth=1)
show()
```

Sensibilidade às condições iniciais



Razão deste modelo em particular

- Possibilidade de compreender a reprodutibilidade dos histogramas e a origem da sensibilidade às condições iniciais.
- Faça-se a seguinte mudança de variável:

$$v_n = \sin\left(\pi x_n - \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 \le x_n \le 1;$$

analogamente:

$$v_{n+1} = \sin\left(\pi x_{n+1} - \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 \le x_{n+1} \le 1.$$

Um cálculo elementar mostra que a recorrência:

$$v_{n+1} = 1 - 2v_n^2$$

é equivalente à recorrência:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2\,x_n & \text{para} \quad 0 \le x_n \le \frac{1}{2} \\ 2 - 2\,x_n & \text{para} \quad \frac{1}{2} \le x_n \le 1 \end{cases}$$

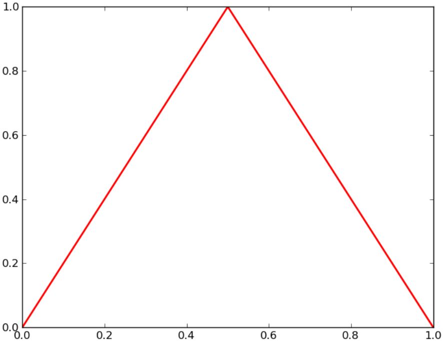
- Ou seja

$$x_{n+1} = g\left(x_n\right), \quad x_n \in [0,1]$$

sendo

$$g(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{para} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2\,x & \text{para} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

cujo gráfico é



Órbitas conjugadas

$$
\begin{array}{ccc}
v_0 & & x_0 \\
v_1 & & x_1 \\
v_2 & & x_2 \\
v_4 & & x_4 \\
\vdots & \underset{\longleftrightarrow}{v_n = \sin\left(\pi x_n - \frac{\pi}{2}\right)} & \vdots
\end{array}
$$

- Exemplo

$$
\begin{array}{ccc}
0.74053 & & 0.76543 \\
-0.09679 & & 0.46914 \\
0.98126 & & 0.93828 \\
-0.92574 & & 0.12344 \\
\vdots & \underset{\longleftrightarrow}{\text{bijecção}} & \vdots
\end{array}
$$

- É fácil calcular as órbitas associadas à relação de recorrência

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2\,x_n & \text{para} \quad 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2\,x_n & \text{para} \quad \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$

- Basta usar a decomposição binária dos números reais $x \in [0,1]$, isto é:

$$x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots = \alpha_1 \times 2^{-1} + \alpha_2 \times 2^{-2} + \alpha_3 \times 2^{-3} + \ldots,$$

com $\alpha_i \in \{0,1\}$, $\quad i = 1,2,3,\ldots.$

- Seja N a negação binária, isto é, $N0 = 1$ e $N1 = 0$.
- Então, $g(x) = 0.\,(N^{\alpha_1}\alpha_2)\,(N^{\alpha_1}\alpha_3)\,(N^{\alpha_1}\alpha_4)\ldots.$

Sensibilidade às condições iniciais

- Exemplo, se $x_0 = 0.10011101001011010\ldots$, temos:

$$
\begin{array}{ll}
n & x_n \\
0 & 0.10011101001011010\ldots \\
1 & 0.1100010110100101\ldots \\
2 & 0.011101001011010\ldots \\
3 & 0.11101001011010\ldots \\
4 & 0.0010110100101\ldots \\
\vdots & \\
10 & 0.0100101\ldots \\
\vdots &
\end{array}
$$

- Consequência imediata: sensibilidade às condições iniciais.
- Exemplo: considerar as condições iniciais

$$x_0 = 0.10011101001011010\ldots$$
$$y_0 = 0.10011101001111001\ldots$$

que diferem no décimo bit significativo, isto é, cerca de $2^{-10} \simeq 10^{-3}$. Depois de 10 iterações, tem-se

$$x_{10} = 0.0100101\ldots$$
$$y_{10} = 0.0000110\ldots$$

- As órbitas estão completamente separadas. Isto chama-se sensibilidade às condições iniciais, muitas vezes apelidada de caos.

Medida invariante

- E quanto à reprodutibilidade dos histogramas apresentados anteriormente?
- Razão: existência de uma medida invariante, que é a distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$, isto é, se

$$\mathrm{P}\left(x_0 \in [a,b]\right) = b - a, \quad \forall 0 \leq a \leq b \leq 1$$

então

$$\mathrm{P}\left(x_n \in [a,b]\right) = b - a, \quad \forall 0 \leq a \leq b \leq 1,$$

que em termos de $v_n's$ se escreve

$$\mathrm{P}\left(x_n \in [c,d]\right) = \int_c^d \frac{1}{\pi\sqrt{1-v^2}}\, dv, \quad -1 \leq c \leq d \leq 1.$$

Conclusão

- Pergunta: Dado um sistema puramente determinista, como o que temos estado a ver, por que decidir passar para uma descrição probabilística com uma condição inicial escolhida aleatoriamente?
- Resposta: Não interessa se a condição inicial é determinista ou aleatória.